

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ**

**Глава 2
Анализ интерферограмм**

ИЗ КНИГИ

**ПРОБЛЕМЫ
ОПТИЧЕСКОГО
КОНТРОЛЯ**

**Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
И. В. Самохвалов**



**НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1990**

Глава 2 написана кандидатом физико-математических наук В. А. Тартаковским

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

К ГЛАВЕ 2

AC	— аналитический сигнал
$БПФ$	— быстрое преобразование Фурье
$ЦФЭТ$	— целая функция экспоненциального типа
E	— оператор математического ожидания
F	— оператор преобразования Фурье
F_{ab}^+	— оператор фильтрации с полосой пропускания (a, b) в области положительных частот
F_{ab}^-	— оператор фильтрации с полосой пропускания (a, b) в области отрицательных частот
G	— интерферограмма
H_x	— оператор преобразования Гильберта по аргументу x
U	— объектное поле, действительная функция
V	— Гильберт-трансформанта функции
W	— объектное поле, аналитический сигнал
$\langle \varepsilon_a \rangle$	— средняя относительная ошибка величины
$\sigma_{\varepsilon a}$	— среднеквадратическое отклонение величины
Φ	— разность фаз интерферирующих полей
φ	— объектная фаза

АНАЛИЗ ИНТЕРФЕРОГРАММ

Интерферометрия способна обеспечить требуемый практикой высокоточный контроль, но традиционные методы анализа интерферограмм не позволяют его реализовать в производственных условиях и являются трудоемкими. Приборы для обработки интерферограмм зарубежных фирм решают частные задачи контроля оптики, однако алгоритмы их функционирования недоступны, а сами устройства не могут быть базовыми для разрабатываемых программ автоматизации оптического производства. Сказанное выше обосновывает актуальность разработки алгоритмов, обеспечивающих эффективный интерференционный контроль оптики.

В литературе описаны методы анализа интерферограмм. Из них традиционные [26, 111, 120], основанные на прослеживании интерференционных полос, неоптимальны, нуждаются в развитом интерактивном режиме, а при анализе в реальном времени требуют стабильности всего кадра интерферограммы при сканировании. Методы, использующие модуляцию во временной области и многоканальное детектирование [11, 125], могут быть реализованы только при наличии прецизионной элементной базы. Имеется группа методов [115, 126, 127, 136, 137, 141], по которым анализируются отдельные фотометрические сечения интерферограммы, при этом каждое сечение рассматривается как зашумленный, модулированный по фазе

сигнал. Однако недостаточное математическое описание интерферограммы как двумерного модулированного колебания не позволяет отчетливо представить требуемые алгоритмы для анализа фотометрических сечений и области их применимости. Слабо проработан вопрос о связи точности оценки качества поверхности с величиной и видом помех в интерферограмме, не изучены способы подавления шума применительно к конкретным видам интерферограмм. По этим причинам сегодня нет ясности о путях достижения требуемой практикой точности.

Отсюда следует постановка задачи восстановления фазы двумерного поля из интерферограммы. Она включает в себя: развитие математического описания интерферограммы как двумерного сигнала, образованного интерференцией волновых полей; обоснование независимого анализа отдельных фотометрических сечений интерферограммы; разработку способов подавления шума как в единичных интерферограммах, так и при наличии специально организованных выборок; создание математического обеспечения ЭВМ для практической реализации разработанных алгоритмов; исследование их качества.

2.1. ОБЗОР МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФАЗЫ ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ИЗ ИНТЕРФЕРОГРАММ

Для контроля оптики широко применяется интерферометр типа Тваймана — Грина (рис. 2.1) [30, 65]. Опорное и объектное поля образуются в нем путем деления амплитуды поля источника света. При этом фаза, вносимая объектом контроля, проектируется на плоскость регистрации. Она связана с оптической длиной пути вдоль проектирующего луча между поверхностью объекта контроля и плоскостью регистрации.

Наблюдению доступна изменяющаяся в пространстве и во времени интенсивность интерференционного поля — интерферограмма, которая при полной когерентности обоих полей и в отсутствие внешнего шума представима в следующем виде:

$$G(x, y, t) = |a_r(x, y) \exp i [\varphi_r(x, y) + \alpha_c(t)x + \varphi_0(t)] + a(x, y) \exp i\varphi \times \\ \times (x, y)|^2 = a^2(x, y) + a_r^2(x, y) + \\ + 2a(x, y)a_r(x, y) \cos \Phi(x, y, t). \quad (2.1)$$

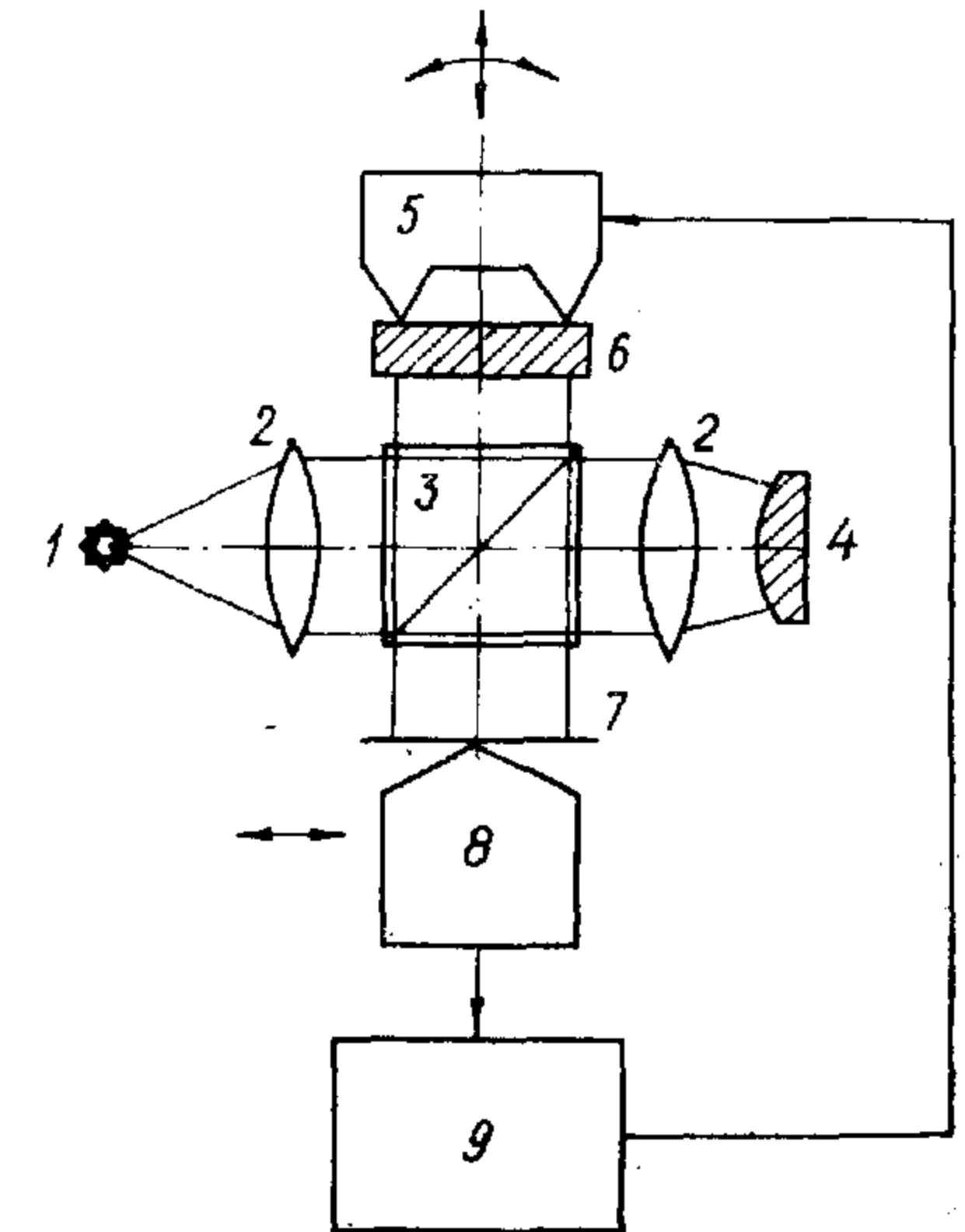


Рис. 2.1. Структурная схема автоматизированного интерферометра.

1 — источник света, 2 — объектив, 3 — светоделитель, 4 — контролируемый объект, 5 — привод эталонного зеркала, 6 — эталонное зеркало, 7 — плоскость регистрации, 8 — фотодетектор, 9 — ЭВМ.

Здесь переменные x и y принадлежат плоскости регистрации интерферограммы, а по t происходит перестройка интерферометра. При непрерывном t имеет место процесс модуляции, если же t принимает дискретные значения, то будет получена некоторая серия интерферограмм. В (2.1) $a(x, y) \exp i \varphi(x, y)$ — объектное поле с амплитудой $a(x, y)$ и фазой $\varphi(x, y)$; $a_r(x, y) \exp i [\varphi_r(x, y) + \alpha_c(t)x + \varphi_0(t)]$ — опорное поле, амплитуда $a_r(x, y)$ должна быть близка к константе так же, как и фаза $\varphi_r(x, y)$. Величина $\alpha_c(t)x$ линейная и $\varphi_0(t)$ постоянная — составляющие фазы для данного момента времени t ; $\Phi(x, y, t)$ — разность фаз интерферирующих полей.

Фаза связана с оптической длиной пути $l(x, y)$ соотношением $\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} l(x, y) + \text{const}$, где λ — длина волны света. Интенсивности опорной и объективной волн обычно измеряются в некоторых относительных единицах. Поэтому без ограничения общности можно положить $a_r^2 = 1$, либо

$$\int_D \int a_r^2(x, y) dx dy \Big/ \int_D \int dx dy = 1,$$

где D — область определения интерферограммы. Несущую частоту α_c и полуширину спектральной полосы $\Delta\alpha$ будем определять в дальнейшем долями характерного размера интерферограммы. При дискретном описании указанным частотам будут соответствовать величины $k_c, \Delta k$.

Контролируемые объекты можно рассматривать как чисто фазовые, объектные и опорные поля суть доли поля источника, при этом распространение полей в каналах интерферометра не приводит к значимому различию в их амплитудах, поэтому можно считать, что $a_r(x, y)$ и $a(x, y)$ отличаются друг от друга множителем, низкочастотным в плоскости (x, y) . В этих условиях целесообразно ввести величины:

$$a(x, y) = \frac{2a(x, y)a_r(x, y)}{a^2(x, y) + a_r^2(x, y)} \simeq 1; \quad 1 + \mu(x, y) = a^2(x, y) + a_r^2(x, y) > 0.$$

Кроме того, дополним (2.1) аддитивной шумовой составляющей $v(x, y) > 0$ и представим, следуя [109], математическую модель интерферограммы в мультипликативно-аддитивной форме:

$$G(x, y, t) = [1 + a(x, y) \cos \Phi(x, y, t)] [1 + \mu(x, y)] + v(x, y). \quad (2.2)$$

Эта модель будет в дальнейшем уточнена, определено физическое и математическое содержание ее составляющих.

Проблема восстановления фазы из интерферограммы заключается в определении неизвестной функции $\Phi(x, y, t_0)$ по зарегистрированной $G(x, y, t)$ и последующем выделении из $\Phi(x, y, t_0)$ объектной фазы $\varphi(x, y)$, что нужно сделать как можно точнее в смысле некоторого критерия.

Корректность постановки такой задачи по Адамару, как известно [40, 91], определяется существованием однозначного реше-

ния и устойчивостью его к ошибкам входных данных. При этом надо указать класс функций, на котором задаются входные данные $G(x, y, t)$, класс, в котором ищется решение $\varphi(x, y)$, оператор, решающий задачу, и максимальную норму ошибки для $G(x, y, t)$. Вывод о корректности будет сделан ниже, на основе проведенных исследований.

Известная задача измерения фазы процесса, определенного на полубесконечном интервале $(-\infty, t)$, решается методами синхронного детектирования [60], построением следящих систем типа фазовой автоподстройки частоты [16, 98], применением процедур оценивания, использующих условия физической реализуемости для фильтров [15, 16, 99].

Отличительными признаками данной задачи по сравнению с известной являются прежде всего двумерность интерферограммы, ограниченность и многосвязность области ее определения, требования равноточности оценки фазы во всей области определения, невыполнение условия узкополосности на линии сканирования для объектного поля. Кроме того, при проведении интерференционного эксперимента неизвестен способ генерации стационарного ансамбля, на котором можно было бы построить процедуру оценивания объектной фазы в условиях действия шума. Все это приводит к специфичности методов восстановления фазы из интерферограмм (рис. 2.2). В качестве базового признака классификации выбрана физическая природа аргумента, от которого зависят обрабатываемые данные, и количество этих аргументов — размерность анализа. Обоснованность такого принципа классификации следует из невозможности перенесения конкретных методов из одного раздела схемы в другой без ущерба для их работоспособности.

Методы, использующие аналитический сигнал и выборку интерферограмм с разным числом полос, являются новыми и будут подробно изложены. Метод интерполяции фазы вводится как одномерный аналог метода хребтовых линий. Остальные известны, они в той или иной степени применяются в практике оптического контроля, их анализу посвящен данный раздел.

Метод хребтовых линий. Уже сам вид интерференционных полос на интерферограмме наводит на мысль, что это некоторая карта. Если интенсивности опорного и объектного полей существенно не меняются в пределах ширины интерференционной полосы, то линии максимумов, минимумов полос, точек перегиба будут линиями уровня функции $\Phi(x, y)$, представляющей разность фаз интерферирующих полей. Причем $\Phi(x, y)$ изменяется на 2π или 0 между соседними одноименными линиями [114]. Отметим, что в отличие от рассмотренных экстремальных линий интерферограммы линии равной интенсивности будут линиями уровня для фазы только при постоянстве амплитуд опорного и объектного полей на всей интерферограмме.

Эти элементарные соображения лежат в основе традиционного метода восстановления интерферограмм. Следуя [26], будем называть его методом хребтовых линий. Предполагается, что интер-

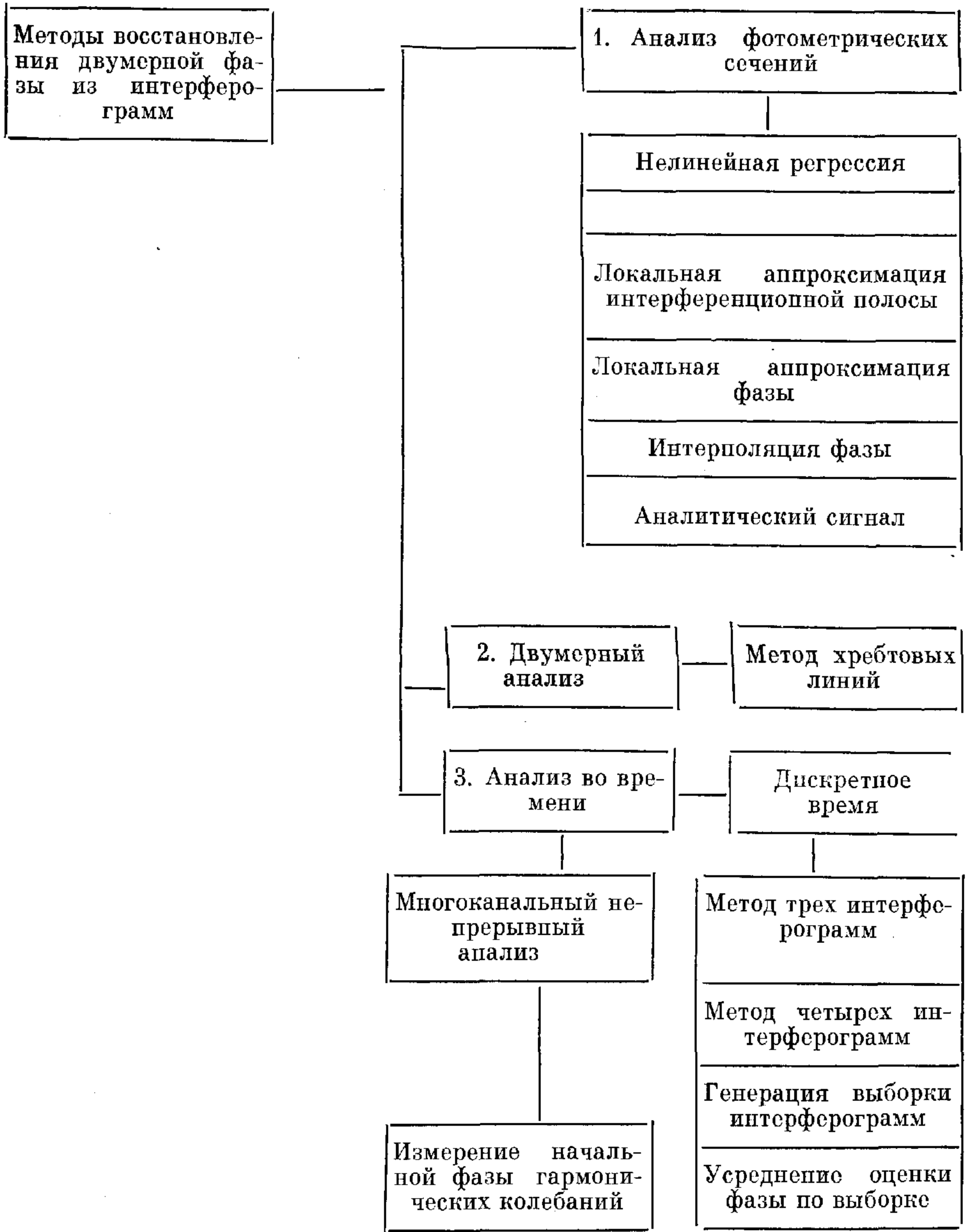


Рис. 2.2. Классификация методов восстановления двумерной фазы из интерферограмм.

ферограмма от времени не зависит, анализируется ее пространственная структура. Сущность анализа в разбиении множества точек интерферограммы на классы, определении границ и центров классов как функций координат x, y .

Вначале производится сканирование и ввод интерферограммы в память ЭВМ. В известной [120] реализации этой операции интер-

ферограмма представляется 512×512 точками отсчетов, интенсивность в каждой точке кодируется восьмибитовым словом. Ввод в ЭВМ этого массива данных происходит за $1/30$ с. Для сканирования используется телевизионная камера. Такие параметры достаточны для большинства приложений. Теорема отсчетов заведомо удовлетворяется. Числа уровней, на которые разбивается диапазон изменения интенсивности интерференционного поля (2^8), также вполне достаточно для получения необходимой точности восстановления фазы. Об этом свидетельствуют результаты численных экспериментов, приведенные в [115].

Вторая операция метода хребтовых линий обеспечивает подавление шумов интерферограммы. В большинстве работ для этого приводятся методы линейной фильтрации, основанные на прямом вычислении свертки. Так, в [48, 111, 120, 128] высокочастотный аддитивный шум подавляют сверткой интерферограммы с квадратной апертурой 3×3 или 5×5 отсчетов. Низкочастотную аддитивную компоненту шума выделяют из интерферограммы также путем свертки, но с апертурой больших размеров, затем эту компоненту вычитают из исходной интерферограммы.

Задача оптимальной фильтрации аддитивных гауссовых шумов решается с помощью линейного фильтра Винера. Критерием является среднеквадратичная ошибка оценки сигнала, априорной информацией — энергетические спектры шума и сигнала. Поскольку априорная информация обычно отсутствует, в работах [95, 97, 109] строится так называемый эмпирический квазивинеровский фильтр. Для оценки энергетического спектра сигнала используется разность между энергетическим спектром наблюдаемой смеси сигнала и шума и эмпирическим спектром шума. Шум считается белым, его интенсивность измеряется как среднее по тем участкам спектральной области, где априорно отсутствует полезный сигнал.

Наряду с фильтром Винера в этих же работах анализируется полосовой фильтр, вырезающий в области частот интервал, где сосредоточен спектр функции $\cos \Phi(x, y)$. Для определения границ интервала используется априорная информация о ширине спектра полезного сигнала, а также критерии идеального наблюдателя и минимального риска. Последние способы требуют априорной информации о законе распределения шума и смеси сигнала и шума.

В [96] приводятся результаты численных экспериментов по фильтрации интерферограмм. Шум был аддитивным, гауссовым, белым и составлял 5% от максимального уровня идеальной интерферограммы. Полосовой фильтр увеличивал отношение сигнал — шум для интерферограммы в 35 раз, эмпирический квазивинеровский фильтр — в 38 раз. Предельное увеличение отношения сигнал — шум, создаваемое теоретическим фильтром Винера, было равно 54. Эти цифры говорят о том, что понижение уровня шума происходило главным образом за счет участков полосы частот, в которых полезный сигнал отсутствовал. Малая разница между первыми двумя цифрами свидетельствует о малой эффективности субоптимального фильтра по сравнению с полосовым в условиях отсутствия точной априорной информации.

Оригинальная идея устранения низкочастотной аддитивной компоненты $A(x, y)$ и низкочастотной мультипликативной компоненты $B(x, y)$ из интерферограммы $A(x, y) + B(x, y) \cos \Phi(x, y)$ предлагается в [109]. Суть ее в том, что высота максимумов интерферограммы равна $A(x_h, y_h) + B(x_h, y_h)$, а минимумов — $A(x_l, y_l) - B(x_l, y_l)$. Интерполируя значения максимумов и минимумов, находят функции $A(x, y)$, $B(x, y)$ для всех значений x, y , а затем и $\cos \Phi(x, y)$. Реализация этой идеи требует учета двух моментов. Первый обусловлен возможностью пересечения поверхности, проходящей через максимумы, с поверхностью, проходящей через минимумы, что приводит к неустраняемому искажению интерферограммы. Такая ситуация возможна из-за большой неоднородности интенсивности в поперечном сечении источника света и отсутствия ограничений при интерполяции экстремумов. Вторым моментом является то, что даже если поверхности максимумов и минимумов проведены через эти экстремальные линии, то они могут пересекать эмпирическую функцию $G(x, y)$ и в других местах. При этом возникает дополнительная модуляция функции $\cos \Phi(x, y)$, которая в рамках данной идеи не может быть устранена.

Рассматривалась также задача построения фильтра с импульсной реакцией, заданной на двумерной области [95, 96]. Параметры фильтра меняются в зависимости от локальной структуры интерферограммы. Строится локальная модель фазы $\Phi(x, y)$, линейная вдоль одной из осей координат и квадратичная вдоль другой. Сглаживающая апертура выбиралась прямоугольной, ее размеры определялись из условия минимума отношения сигнал — шум, а направление движения апертуры — из условия максимума взаимной корреляционной функции. Отношение сигнал — шум в интерферограмме возрастало при этом в 23 раза.

Общим недостатком линейной фильтрации является то, что она вызывает краевой эффект из-за ограниченности области определения интерферограммы. Сглаживающие окна, которые в аналогичных случаях применяют для улучшения спектральных оценок [106], в рассматриваемой задаче неэффективны. Они значительно уменьшают амплитуду сигнала на краях интервала определения, а после фильтрации на этих участках происходит относительное увеличение уровня шума. Это отмечено в [137], где приводится график ошибки восстановленной фазы, краевой эффект заметен на 20 % длины интервала, с максимальным значением больше $\lambda/10 \sim 0,2\pi$ рад.

После линейной фильтрации переходят к определению координат экстремальных линий и прослеживанию этих линий на интерферограмме, при этом также применяются шумоподавляющие процедуры. Экстремальные линии как линии уровня нигде не должны прерываться и обязательно достигают границы интерферограммы, если только они не являются замкнутыми [111]. В одной из первых отечественных работ по этому вопросу [49] описан алгоритм определения декартовых координат и локального угла наклона линий максимума интерференционных полос. Критерием истинного положения максимума является максимум апостериорной вероятности,

который практически совпадает с максимумом функции корреляции между моделью интерференционной полосы и полем интерферограммы. Дисперсия оценки координат экстремальной линии обратно пропорциональна отношению сигнал — шум и кривизне нормированной автокорреляционной функции полезного сигнала в максимуме. Эксперимент показал эффективность алгоритма для полос с мало меняющейся кривизной. В противном случае возникает погрешность, зависящая от масштаба модели полосы. Поэтому при сложной структуре полос и высоком уровне шума применяется ручная ретушь интерферограммы [51]. Это соответствует данным, приведенным в [117, 142], а также в [53].

В [2] проведено численное моделирование процесса отслеживания полосы системой с ПЗС-матрицей. Оказалось, что эффективность отслеживания существенно зависит от уровня шума в интерферограмме. Трехпроцентный аддитивный шум уже является предельным для применяемого алгоритма. При уровне шума 1 % среднеквадратичное отклонение составляет 0,2 % от ширины полосы.

Широко распространена линейная регрессия для оценки экстремума полосы [2, 48]. В последней работе в качестве модели полосы используют две параболы — одну для верхней половины, другую для нижней половины полосы. Достигаемая точность 1,5... 7 % ширины полосы.

Экстремальные линии интерферограммы часто заменяют средними линиями, равноудаленными от границ интерференционной полосы, они образуют «скелет» интерферограммы. Для нахождения этих линий используют алгоритмы скелетонизации. Сущность алгоритма в том, что отсчеты интерферограммы в памяти ЭВМ получают значения 0 или 1 в зависимости от того, больше данный отсчет выбранного порога или нет. Затем осуществляется просмотр полученной бинарной интерферограммы, и каждая 1 заменяется на 0, если она находится на границе полосы. Эта операция повторяется до тех пор, пока полоса не превратится в цепочку единиц, располагающихся по средней линии. Подобный алгоритм входит в систему математического обеспечения установки Quantimet-900 [75], выпускаемой фирмой «Cambridge Instruments». Эффективность алгоритма скелетонизации сильно зависит от уровня шума в интерферограмме. Практически он дополняется ручной ретушью полученного скелета.

Операция определения порядка сводится к последовательной нумерации экстремальных линий. При этом порядок соседних линий отличается на единицу или нуль, а линии с разными порядками не пересекаются и не касаются друг друга. Обычно эта операция требует участия человека, так как ее трудно формализовать [53, 117, 128, 142]. ЭВМ работает в интерактивном режиме, а оператор с помощью дисплея и светового карандаша производит нумерацию линий. В [109] описана последовательность действий, осуществляющая рассматриваемую операцию автоматически. Алгоритм основан на логических операциях и имеет сложную структуру.

Оценка фазы на экстремальных линиях вычисляется по формуле $\Phi_n(x, y) = 2\pi n$, где n — порядок линии [53, 122]. Начальное значение фазы $\Phi_0(x, y)$ может быть выбрано нулевым. В случае если порядок соседних линий совпадает, это является признаком наличия экстремума функции [109], но однозначного восстановления знака функции $\Phi(x, y)$ не происходит. Если $\Phi(x, y)$ имеет несколько экстремумов, то невозможно отличить минимум от максимума без дополнительной априорной информации.

Полученную ступенчатую функцию $\Phi_n(x, y)$ интерполируют между соседними линиями какой-либо модельной зависимостью. Традиционно для этого применяют полиномы Цернике [10, 116, 122]. Полиномы ортогональны на единичном круге, образуют полную систему. По этой причине коэффициент каждого последующего члена разложения не зависит от предыдущих и при увеличении числа членов разложения погрешность аппроксимации монотонно убывает. Для определения коэффициентов разложения применяют метод наименьших квадратов. Минимизируется сумма квадратов отклонений отрезка ряда полиномов Цернике от значений фазы, заданной в точках отсчетов, на экстремальных линиях. Если отсчеты равномерно покрывают апертуру, то полиномы приблизительно ортогональны и аппроксимация будет устойчива [1, 122]. Реально восстановленную фазу приходится интерполировать по неравномерной сетке [52]. Для улучшения оценки применяется ортогонализация полиномов Цернике на произвольной выборочной функции по методу Грамма — Шмидта [1]. Ставится также задача о поиске оптимального базиса для данного распределения точек отсчета [70].

Метод хребтовых линий широко применяется в практике оптического контроля, на его основе ряд зарубежных фирм выпускает приборы для анализа интерферограмм. Достигнутая в экспериментах точность составляет $0,1 \dots 0,05\lambda$ [29, 39, 128]. Эта точность определяется качеством реализации интерференционного эксперимента и может быть повышена [20, 38, 58, 109]. Однако рассматриваемому методу присущ ряд характерных недостатков. Первый — это неоптимальность, так как при прослеживании полос не минимизируется критерий, непосредственно связанный с фазой объекта. Кроме того, сам принцип анализа по центрам интерференционных полос, который в силу традиции уже стал структурным ограничением, связан с потерей исходной информации. Если исходное количество информации в интерферограмме можно оценить как $N^2 b$ бит, где N^2 — количество отсчетов; b — разрядность отсчета, в восстановленной фазе — также $N^2 b$ бит, то после прослеживания полос остается N^2 бит, так как полоса — это единица на фоне нулей. Стало быть, сначала информация теряется, а затем восстанавливается на основе априорных моделей фазы. Это неоптимально и приводит к потере точности оценки. Другим недостатком является противоречие [21] между требуемым разрешением на измеряемой апертуре и чувствительностью интерферограммы к изменениям фазы. Так, анализ интерферограммы $G(x)$ (2.1) при $a_\tau = 1$; $y, t = \text{const}$; $\Phi(x) = \frac{2\pi}{\tau} x + \varepsilon\varphi(x)$, где τ —

средний период полос; ε — малая величина, показывает, что функция, характеризующая период полос

$$T(\varepsilon, \varphi) = \tau + \frac{\varepsilon\tau}{2\pi} [\varphi(x) - \varphi(x + T)], \quad \Phi(x + T) - \Phi(x) = 2\pi,$$

испытывает вариации

$$\delta T_\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial T(\varepsilon, \varphi)}{\partial \varepsilon} = \frac{\tau}{2\pi} [\varphi(x) - \varphi(x + T)].$$

Следовательно, для повышения чувствительности метода хребтовых линий к малым фазовым набегам необходимо увеличение τ , но это ведет к уменьшению пространственного разрешения на объекте, так как на интервале $[0, \tau]$ можно взять отсчеты только в экстремальных точках полосы. На диаметре измеряемой детали таких точек обычно $20 \div 25$ [19]. Кроме того, из анализа вариаций интерферограммы

$$\delta G_\varphi(x) = 2\varphi(x) a(x) \sin \frac{2\pi}{\tau} x$$

становится ясно, что средний период полос τ не является фактором, принципиально ограничивающим чувствительность интерференционного метода [21]. Поэтому анализ интерферограмм, не связанный с измерением расположения ее хребтовых линий, потенциально более чувствителен.

Методы восстановления фазы по отдельным фотометрическим сечениям интерферограммы. Сущность этой группы методов в том, что на двумерной интерферограмме выбирают прямолинейные фотометрические сечения (сканы), затем по какому-либо алгоритму каждый скан интерферограммы преобразуют в скан фазы. Очевидно, что наборы отдельных сканов фазы должны быть затем увязаны в двумерную функцию, но эта задача в известных источниках в явном виде не рассматривается. Малое число интерференционных полос на скане и отсутствие на нем узкополосности для объектного поля обуславливают специфичность применяемых методов. Одним из них является метод нелинейной регрессии.

Уравнение нелинейной регрессии [136] получается из условия минимума квадратичного отклонения полиномиальной модели интерферограммы от полученных в интерференционном эксперименте данных:

$$\mathcal{L} = \int_D \left\{ G(x) - \sum_{n=1}^N p_n(x) \left[a_n + b_n \cos \sum_{n=1}^N c_n p_n(x) \right] \right\}^2 dx = \min.$$

Решение системы $3N$ нелинейных уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_n} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

дает неизвестные коэффициенты полиномиальных разложений в модели.

Метод полностью использует информацию, заключенную в изменениях интенсивности интерференционного поля. Особенно при-

годен он в случае малого числа интерференционных полос на интерферограмме. Эффективно подавляет высокочастотный лазерный спектр и неоднородность поля источника. Однако нелинейные искажения данных $G(x)$ приведенная полиномиальная модель не учитывает, поэтому они переходят в найденные значения коэффициентов, ухудшают их оценку.

Метод решает задачу восстановления фазы объектного поля из интерферограммы, но его существенным недостатком является использование итераций для решения нелинейных регрессионных уравнений. Как известно, метод итераций сходится и обеспечивает единственное решение в случае, когда итерируемый оператор является оператором сжатия [164]. В общем случае сжатие реализуется в некоторой области, причем начальное приближение должно в ней находиться. Выполняются или нет эти условия для модели интерферограммы и конкретных экспериментальных данных, установить довольно трудно. Вопрос о скорости сходимости итерационного процесса также не исследован в рассматриваемой работе.

Простой метод восстановления фазы из интерферограмм был предложен Мертцем [126, 127] и описан в [123]. По этому методу полоса в поперечном сечении аппроксимируется тремя первыми членами ряда Фурье — $a \cos \frac{2\pi}{\tau} x + b \sin \frac{2\pi}{\tau} x + c$. Интенсивность измеряется в трех точках полосы: x_1, x_2, x_3 , после чего решают три линейных уравнения и находят неизвестные коэффициенты a, b и c . Затем находят фазу $\Phi = \arctg(b/c)$. При этом предполагается, что $\Phi \approx \text{const}$ в пределах трех точек измерения x_1, x_2, x_3 , а ее изменения происходят за счет удаления начальной точки x_1 и добавления новой точки x_4 .

В эксперименте интерферограмма имела 128×128 точек отсчета. Изменения фазы на интерферограмме были порядка λ — длины волны, шум составлял $\lambda/30$, а среднеквадратичное отклонение оценки — $1/50$ длины волны.

Достоинства этого метода в его простоте и высоком быстродействии, а главный недостаток в том, что интерференционные полосы должны быть близки к синусоидальным — с мало меняющимся периодом τ . Кроме того, анализ локален и потому чувствителен к выбросам лазерного спектра и нелинейности интерферограммы. Эти помехи будут преобразовываться в изменения фазы. Для того чтобы устранить влияние помех, необходимы предварительная фильтрация интерферограммы и компенсация нелинейности фоторегистратора.

В [111, 140] приведен метод восстановления фазы, во многом похожий на предыдущий, но отличающийся тем, что применяется локальная модель фазы, а не модель интерференционной полосы. Сущность метода в аппроксимации фазы в пределах j -го периода интерференционных полос на скане линейной функцией $\varphi_j(x) = c_j + d_j x$, а интерферограмма при этом имеет вид

$$G_j(x) = a_j + b_j \cos [l_j + (k_c + d_j)x],$$

где k_c — несущая частота. При сканировании интерферограммы по-

перек полос вычисляют интегралы

$$S = \int_{2\pi j/k_c}^{2\pi(j+1)/k_c} G_j(x) \sin k_c x dx, \quad C = \int_{2\pi j/k_c}^{2\pi(j+1)/k_c} G_j(x) \cos k_c x dx$$

и определяют фазу в средней точке полосы как $\varphi_j = \arctg \frac{S}{C}$. При этом предполагают, что $k_c \gg d_j$.

Достоинство этого метода в простоте вычислений. Данных о точности не приводится, но в силу локальности модели фазы ему, очевидно, присущи те же недостатки, что и предложенному Мертцем.

Методы восстановления двумерной фазы, использующие изменения интерферограммы во времени. Известна группа методов, для которых характерны активное формирование зависимости интерферограммы от времени и использование этой зависимости в последующем анализе, при этом интерферограмма остается функцией и пространственных координат. Временная зависимость входит в интерферограмму через фазовый сдвиг $\varphi_0(t)$, реализуемый введением в одно из плеч интерферометра (см. рис. 2.1) быстродействующего модулятора, изменяющего длину плеча. Если модулятор работает в непрерывном режиме, то отдельные точки плоскости (x, y) анализируются во временной области. Если же модулятор имеет несколько дискретных состояний, то происходит совместный анализ нескольких интерферограмм, полученных для заданных дискретных значений $\varphi_0(t_i)$.

При непрерывной модуляции функция $\varphi_0(t)$ обычно выбирается линейной. В известных [11, 125] реализациях таких интерферометров осуществляется многоканальный корреляционный прием во времени гармонического колебания с неизвестной начальной фазой $\varphi(x, y, t_0)$ либо гармоническое колебание выделяется узкополосным фильтром. Однако, поскольку требуется фаза как функция пространственных координат, необходимо увязать результаты, полученные в каждом из каналов, в двумерную поверхность. Так как нет оснований считать средний шум одинаковым в измерительных каналах, то задача увязки решается при наличии прецизионных модуляторов и многоканальных детекторов. В [101] отмечаются необходимость высокоточного согласования отдельных каналов и сложности, создаваемые нелинейностью, гистерезисом и паразитными вибрациями существующих фазовых модуляторов. По этим причинам, несмотря на высокую потенциальную точность $\lambda/500$, методы с линейной фазовой модуляцией не получили широкого применения.

Известны методики интерференционного контроля, объединенные тем, что в опорное плечо интерферометра вводят кусочно-постоянный во времени сдвиг фазы $\varphi_0(t_i)$. На каждой ступеньке производят регистрацию интерферограммы [24, 81, 114, 115, 142].

В [115] рассматривается метод трех интерферограмм, по которому $\varphi_0(t_i)$ принимает три значения: $0, \pi/2, \pi$ и регистрируются

соответствующие интерферограммы. При этом возникает система уравнений:

$$\begin{cases} G_0 = a^2 + a_r^2 + 2aa_r \cos \Phi(x, y, t_0); \\ G_1 = a^2 + a_r^2 + 2aa_r \sin \Phi(x, y, t_1); \\ G_2 = a^2 + a_r^2 + 2aa_r \cos \Phi(x, y, t_2), \end{cases} \quad (2.3)$$

из которой находят $C = (G_0 - G_1) / (G_0 - G_2)$, а затем $\Phi = \arctg(2C - 1)$.

Методика, описанная в [142], предусматривает регистрацию четырех интерферограмм. При этом $\varphi_0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, а к системе (2.3) добавляется еще одно уравнение:

$$G_3 = a^2 + a_r^2 - 2aa_r \sin \Phi(x, y, t_3).$$

В результате находят

$$\Phi = \arctg \frac{G_1 - G_3}{G_0 - G_2}. \quad (2.4)$$

Судя по литературным данным, методы с кусочно-постоянным изменением фазы обеспечивают точность оценки фазы $\pi/10 \dots \pi/50$. Однако нет данных об их помехоустойчивости.

Недостатки этих методов заключаются прежде всего в необходимости контролировать с высокой точностью сдвиги фазы $\varphi_0(t_i)$, что значительно усложняет аппаратуру. Кроме того, детектирование нескольких интерферограмм в условиях шума, например, при вибрациях установки приведет к их отличию от тех идеальных, что входят в систему (2.3), и понизит качество оценки фазы $\Phi(x, y)$. Пусть вибрации приводят только к неконтролируемому сдвигу интерферограмм относительно друг друга. Оценим ошибку ε определения фазы $\Phi(x, y)$, вызванную относительным сдвигом интерферограмм Δ . Из (2.4) при малых Φ найдем, что $\varepsilon = \alpha_c \Delta / 2$. При $\Delta = 0,01$ см и несущей частоте $\alpha_c = 20$ см⁻¹ получим, что $\varepsilon = 0,1$ рад. Эта ошибка сравнима с требуемой точностью оценки фазы. Стало быть, для интерферограмм с большим числом полос ($\alpha_c \sim 20$ см⁻¹) взаимная привязка является критичной операцией, она должна осуществляться с погрешностью $< 0,01$ см.

Анализ известных методов восстановления фазы из интерферограмм показал, что они имеют общий недостаток — отсутствует в явном виде определение фазы. Соотношения, которые для данной действительной функции определяют ее амплитуду и фазу, дополнили бы интерференционное уравнение (2.1) и способствовали бы повышению помехоустойчивости применяемых алгоритмов, позволили бы правильно спланировать интерференционный эксперимент. Перейдем к рассмотрению этого вопроса.

Определение амплитуды и фазы колебания с помощью аналитического сигнала. Представление колебательного или волнового процесса в виде двух величин — амплитуды и фазы — требует непротиворечивого определения этих понятий. Волновое уравнение или

уравнение, описывающее колебательный процесс, такого определения в явном виде не содержат, поэтому нужны некоторые дополнительные соображения. Опубликовано значительное число работ, в которых рассматриваются вопросы определения амплитуды и фазы применительно к одномерному колебательному процессу. Основные результаты изложены в [13, 14, 17, 18, 36, 37, 50, 68, 77, 78, 89, 90, 118, 124].

Существуют различные способы введения амплитуды и фазы. Анализ этих способов был проведен в [13, 14, 17]. Выводы можно сформулировать следующим образом. Для гармонических функций — синуса и косинуса — все определения дают одинаковый результат, что является необходимым условием правильности определения. Для узкополосных сигналов результаты различных способов не совпадают, при уменьшении величины $\Delta\alpha/\alpha_c$ несовпадение также уменьшается. Наиболее общее определение амплитуды и фазы можно дать [14] с помощью так называемого аналитического сигнала (АС), который ввел Габор [118].

Для данной действительной функции $U(x)$ аналитический сигнал $W(x)$ строится следующим образом:

$$W(x) = U(x) + iV(x), \quad (2.5)$$

где $V(x) = \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(s)}{x-s} ds = \underset{x}{H}U(x)$ — мнимая составляющая аналитического сигнала, являющаяся Гильберт-трансформантой его действительной части $U(x)$; $\underset{x}{H}$ — оператор преобразования Гильберта по аргументу x . При этом амплитуда находится так: $a(x) = \sqrt{U^2(x) - V^2(x)}$, а фаза — $\varphi(x) = \arctg \frac{V(x)}{U(x)}$.

В [13] показано, что оператор $\underset{x}{H}$ является единственным линейным оператором, для которого справедливо

$$\underset{x}{H} \cos(\alpha_c x + \varphi_0) = \sin(\alpha_c x + \varphi_0),$$

где $\alpha_c > 0$, φ_0 — неизвестные константы. Поэтому определение амплитуды и фазы осуществляется однозначно. Другие многочисленные свойства преобразования Гильберта обсуждаются в [14, 17, 92, 93]. Приведем из них два, которые будут в дальнейшем применяться. Из свойства

$$\underset{x}{H}U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \alpha \cdot e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} U(y) e^{-i\alpha y} dy \quad (2.6)$$

следует, что преобразование Гильберта эквивалентно умножению в частной области на знаковую функцию. Другое свойство выделено в [37] как определяющее для применения АС в теории модуляции. Оно позволяет отделить в амплитудно модулированном сигнале низкочастотное модулирующее колебание:

$$\underset{x}{H}\Omega(x)U(x) = \Omega(x)\underset{x}{H}U(x), \quad (2.7)$$

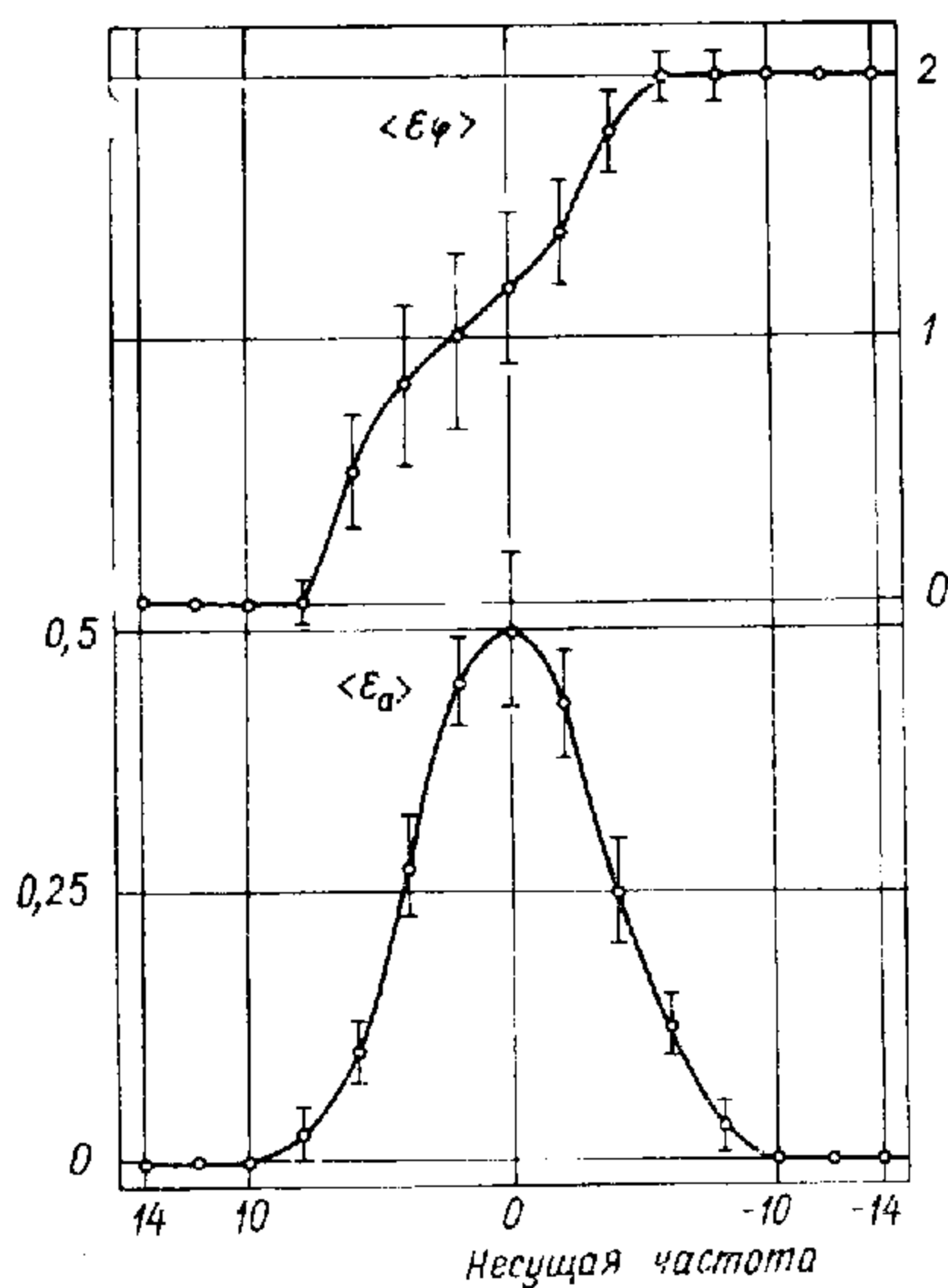


Рис. 2.3. Сравнение фазы и амплитуды нормального случайного процесса, определенных через аналитический сигнал с фазой и амплитудой этого же процесса при сдвиге его спектральных полос к нулевой частоте и последующем обмене.

где $\Omega(x)$ и $U(x)$ — действительные функции, преобразования Фурье которых не пересекаются в частной области, причем $U(x)$ более высокочастотна, чем $\Omega(x)$.

Аналитичность функции $W(x)$ является следствием причинности ее преобразования Фурье — при частоте $\alpha < 0$ спектральные составляющие отсутствуют. Это обуславливает единообразность определения амплитуды и фазы как для узкополосных действительных сигналов, у которых

полуширина спектра $\Delta\alpha \ll \alpha_c$, так и в случае более общих широкополосных сигналов, у которых несущая частота α_c может быть достаточно низкой, такой, что $\Delta\alpha \leq \alpha_c$. Однако когда $\Delta\alpha > \alpha_c$, возникают проблемы. Если при таком соотношении частот ввести АС и сравнить его с АС, который введен для несущей частоты, сдвинутой вверх на величину p , а именно $\alpha_c + p > \Delta\alpha$, то в общем случае совпадения амплитуд так же, как и фаз, не будет (рис. 2.3). Сравнивались амплитуда и фаза нормального случайного процесса, определенные через аналитический сигнал, когда $\alpha_c > \Delta\alpha$, с амплитудой и фазой этого же процесса при сдвиге его спектральных полос к нулевой частоте и последующем обмене. Спектральные полосы были финитны и занимали в области частот по 20 отсчетов. Несущая частота α_c изменялась при этом от 14 до -14, а частота Найквиста равнялась 128. Оценка несовпадения определялась по формуле

$$\langle \epsilon_a \rangle = \left\langle \frac{\sum_{j=1}^N [a(j) - \hat{a}(j)]^2}{\sum_{j=1}^N a^2(j)} \right\rangle^{1/2}, \quad N = 256 \quad (2.8)$$

и имела смысл среднего отношения норм в L_2 . В этой формуле $a(j)$ — отсчеты амплитуды или соответственно фазы $\varphi(j)$ исходного процесса; $\hat{a}(j)$ — отсчеты амплитуды (фазы) процесса с изменяющимся положением спектральных полос.

Как видно из рис. 2.3, в тех случаях, когда спектральные полосы не охватывают точку $\alpha = 0$, $\langle \epsilon_a \rangle$ и σ_{ea} равны нулю. Стало быть, амплитуда сигнала инвариантна относительно смены знака несущей частоты α_c , тогда как фаза изменяет свой знак, при этом $\sigma_{e\varphi} = 0$,

а $\langle \epsilon_\varphi \rangle$ от нуля переходит к двум. Если точка $\alpha = 0$ попадает внутрь спектральной полосы, оценка несовпадения амплитуды становится отличной от нуля, а для фазы — от нуля и от двух. Величины σ_{ea} и $\sigma_{e\varphi}$ также получают ненулевые значения. Причем оценка несовпадения для фазы примерно в 2 раза выше, чем для амплитуды, а $\sigma_{e\varphi}$ превышает σ_{ea} в 4 и более раз.

Таким образом, когда $\Delta\alpha \sim \alpha_c$, возможность применения аналитического сигнала для определения амплитуды и фазы становится проблематичной. Но эта ситуация типична для интерферометрии. Она может реализоваться, когда интерференционные полосы существенно изменяют свою ширину и кривизну, и заведомо присутствует, если интерферограмма имеет вид колец.

Другим препятствием для использования аналитического сигнала является четырехмерность оптической волновой функции. Возникает вопрос, по какой из координат следует проводить преобразование Гильберта и как различные аналитические сигналы будут соответствовать друг другу [82]. Сохранение единственности определений вызывает необходимость обобщения понятия аналитического сигнала на многомерный случай. Это даст возможность записать соотношения для восстановления объектной фазы по двумерной интерферограмме.

2.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ДЛЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНТЕРФЕРОГРАММЫ

Модель интерферограммы в форме (2.1), (2.2) необходимо уточнить, расширяя математическое содержание входящих в нее величин. Для этого применим аналитический сигнал.

Основное качество математической модели — ее пригодность для исследования — во многом определяется свойствами тех функций, из которых она составлена. При выборе класса функций для представления модели примем во внимание два обстоятельства. Первое — это однозначное описание интерферограммы дискретным рядом отсчетов, второе — существование преобразования Гильберта, которым вводится аналитический сигнал.

Представление функции рядом дискретных отсчетов осуществляется на основе теоремы Котельникова, при этом дискретизируемая функция должна иметь финитное преобразование Фурье. По теореме Винера — Пэли для квадратично интегрируемых функций или Винера — Пэли — Шварца [104], если спектр имеет особенности в виде δ -функций и их производных, функции, имеющие финитный спектр, являются целыми функциями экспоненциального типа (ЦФЭТ). Более того, так как рассматриваются только ограниченные функции, то ЦФЭТ будет еще и функцией класса «А» [42, 69].

Из ограниченности ЦФЭТ следует абсолютная интегрируемость ее преобразования Фурье (спектра), включая случай, когда она не принадлежит L_2 . Справедливо и обратное утверждение, а так как преобразование Гильберта от ЦФЭТ не нарушает абсолютной ин-

реггируемости ее спектра, то Гильберт-трансформанта также будет ограниченной. Преобразование Гильберта существует и для функций с непрерывной производной, и для еще более широкого класса функций, которые удовлетворяют условию Гельдера [66], но из-за необходимости дискретного представления эти классы функций применяться не будут.

Выясним, что влечет за собой применение ЦФЭТ класса «А» для представления интерферограммы. В [34] доказывается теорема, из которой следует, что модуль разности между действительной непрерывной функцией $G(x)$ и аппроксимирующей ее ЦФЭТ может быть как угодно мал для всех x , если

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(t)}{\log(t)} = 0,$$

где $\mu(t) = \max |G'(x)|$ при $|x| < t$. Это накладывает ограничения на рост амплитуды и частоты интерференционных полос, который должен быть более медленным, чем рост любой степени x .

Описание волнового поля в многомерном случае аналитическим сигналом. Рассмотрим общее решение скалярного волнового уравнения, соответствующее распространению квазимонохроматической волны в однородной среде вдоль оси z :

$$W(x, y, z, t) = \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)] d\alpha d\beta. \quad (2.9)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = (\omega^2/c^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$ — пространственные частоты; ω — временная частота; c — скорость света. Такого представления достаточно для описания процесса распространения света в оптической системе интерферометра (см. рис. 2.1), в частности, (2.9) в плоскости регистрации соответствует объектному полю из (2.1). Если частоты ω и γ принимают только положительные значения, то функция $W(x, y, z, t)$ представляет собой аналитический сигнал как по переменной z , так и по переменной t . Условия положительности могут быть нарушены, например, из-за появления волн, отраженных поверхностями оптической системы и распространяющихся навстречу основной волне. Однако будем считать, что амплитуда встречной волны мала, а оптическая схема интерферометра позволяет отделить ее в области пространственных частот (α, β) от прямой волны.

Переменные z и t во время эксперимента фиксированы, а сигнал-интерферограмма задается как функция x и y , поэтому необходимо ввести АС именно по этим аргументам. Но спектр $S(\alpha, \beta)$ в общем случае локализован вокруг начала координат частотной области (α, β) , поэтому $W(x, y, z_0, t_0)$ не является АС [85, 86].

Повернем плоскость регистрации (x, y) относительно оси x и оси y на некоторый угол. В этой новой плоскости p координата z уже не будет фиксированной:

$$p(x, y, z) = z_0 - z + \eta x + \zeta y = 0.$$

Выражение (2.9) примет вид

$$W[p(x, y, z), t] = \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha', \beta') \exp[-i(\alpha' x + \beta' y + \varphi'_0 - \omega t)] d\alpha' d\beta',$$

где $\alpha' = \alpha + \eta\gamma$, $\beta' = \beta + \zeta\gamma$, $\varphi'_0 = \gamma z_0$.

Ширина спектра $S(\alpha, \beta)$ в дисперсионном смысле мала по сравнению с величиной $\omega_c/c \simeq 10^4$ мм⁻¹, где ω_c — центральная частота временного спектра. Это дает возможность выбрать значения η и ζ такими, что спектр $S(\alpha', \beta')$ будет локализован в одном квадранте частотной плоскости (α', β') , и функция $W(x, y, z, t)$ в плоскости $p(x, y, z)$ становится аналитическим сигналом как по x , так и по y .

Оценим порядки величин η, ζ и угол наклона плоскости регистрации относительно оси z . Пусть длина волны света $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, а ширина спектра $S(\alpha, \beta) = \eta_N = 200\pi$ мм⁻¹, что соответствует пространственному периоду 0,01 мм. Величины η и ζ найдем из условия

$$\eta > \frac{\eta_N}{[(2\pi/\lambda)^2 - \eta_N^2]^{1/2}} \simeq 6,3 \cdot 10^{-2}.$$

Это соответствует наклону плоскости регистрации относительно оси z на угол

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctg \eta \simeq 86^\circ.$$

Экспериментально устанавливается такой угол θ , что пучок света, падающий на плоскость регистрации, лежит по одну сторону от некоторой нормали к этой плоскости. Этим обеспечивается условие причинности для углового спектра функции $W[p(x, y, z), t]$. Поворот плоскости регистрации приводит к появлению у волны в этой плоскости пространственной несущей. Такая возможность является следствием того, что переменные x, y, z входят аддитивно под знак экспоненты в (2.9). Точно так же, аддитивно, входит туда и t . Поэтому фаза и амплитуда, определенные аналитическим сигналом, который вводится по времени или по z , совпадают в плоскости регистрации с фазой и амплитудой, определенными аналитическим сигналом, введенным по x или y , когда $p(x, y, z) = 0$. Это можно выразить следующим образом:

$$W(x, y, z, t) = U(x, y, z, t) + iV(x, y, z, t);$$

$$V(x, y, z, t) \triangleq \underset{t}{H} U(x, y, z, t) = \underset{z}{H} U(x, y, z, t); \quad (2.10)$$

$$V[p(x, y, z), t] = \underset{x}{H} U[p(x, y, z), t] = \underset{y}{H} U[p(x, y, z), t].$$

Смысл приведенных выражений заключается в инвариантности АС в многомерном случае относительно аргумента преобразования Гильберта, в единственности АС, его амплитуды и фазы.

Взаимосвязь между причинностью преобразования Фурье комплексной функции и монотонностью ее фазы. Анализируя интерферограмму $G(x, y) = |1 + W(x, y)|^2$ вне связи с процессом ее получения, трудно сделать вывод, имела ли комплексная функция $W(x, y)$ причинный спектр. Тем более это затруднительно, когда интерференционные полосы криволинейны и линия сканирования пересекает их под различными углами. Имея в виду, что сдвиг спектра в области частот эквивалентен добавлению линейной функции к фазе сигнала, свяжем причинность спектра комплексной функции с монотонностью ее фазы [88]. Свойство монотонности проявляется экспериментально в том, что интерференционные полосы имеют полный профиль.

Воспользуемся неравенством Бернштейна [105]:

$$\max |W'_k(x)| \leq \Delta\alpha \max |W_k(x)|, \quad (2.11)$$

где функция $W_k(x) = a(x) \exp i\varphi(x)$ принадлежит к классу функций с финитным спектром; $\Delta\alpha$ — полуширина спектра. Пусть $a(x) = \text{const}$, тогда найдем $\max |\varphi'(x)| \leq \Delta\alpha$. По теореме о сдвиге в частотной области функция $\exp i[\varphi(x) + \Delta\alpha x]$ имеет причинный спектр, а из неравенства Бернштейна следует, что $\varphi(x) + \Delta\alpha x$ заведомо монотонная функция, т. е. причинность есть достаточное условие наличия монотонности. Поэтому, очевидно, возможны случаи, когда монотонность присутствует, а причинности нет.

Рассмотрим случай, когда $a(x) \neq \text{const}$. Из неравенства Бернштейна получим

$$\Delta\alpha^2 \geq \max [a'^2(x) + a^2(x)\varphi'^2(x)] / \max a^2(x) \geq \max [a^2(x)\varphi'^2(x)] / \max a^2(x) = r^2 \max \varphi'^2(x),$$

где $r^2 \leq 1$, тогда $\Delta\alpha \leq r \max |\varphi'(x)|$. Последнее неравенство допускает три ситуации — причинность спектра без монотонности фазы, монотонность без причинности и совместное присутствие обоих свойств.

Выясним, какое утверждение справедливо для функций, не имеющих финитного спектра. Определим ширину спектра Фурье функции $W_k(x)$ в дисперсионном смысле:

$$\Delta\alpha = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |FW_k(x)|^2 (\alpha - \alpha_c)^2 d\alpha \right]^{1/2}, \quad (2.12)$$

где F — оператор Фурье-преобразования, из [63] следует

$$\Delta\alpha^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) [\varphi'(x) + \alpha_c]^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a'^2(x) dx.$$

Положим $\alpha_c = 0$, поскольку интересна ширина спектра относительно центральной частоты, и оценим сверху величину $\Delta\alpha^2$:

$$\Delta\alpha^2 \leq A^2 \max \varphi'^2(x) + B^2,$$

$$\text{где } A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) dx, \quad B^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a'^2(x) dx.$$

Без ограничения общности положим $A^2 = 1$. Тогда спектр функции

$$a(x) \exp i[\varphi(x) + x\sqrt{B^2 + \max \varphi'^2(x)}]$$

причинен в дисперсионном смысле, а ее фаза является монотонной функцией, как это вытекает из неравенства

$$\Delta\alpha < \sqrt{B^2 + \max \varphi'^2(x)} > \max |\varphi'(x)|.$$

Следовательно, при достаточно большом линейном фазовом сдвиге монотонность и дисперсионная причинность наблюдаются совместно.

Пусть $a(x) = \text{const}$, $\varphi'(x) \in L_2$. Найдем, что $\max |\varphi'(x)| > \Delta\alpha$, поэтому монотонность при сделанных предположениях есть достаточное условие дисперсионной причинности. Это будет справедливо и для T -периодической $W_k(x)$, фаза в этом случае будет принадлежать пространству $L_2(T)$.

Функция косинус, входящая в модель интерферограммы, периодическая и четная, поэтому немонотонная фаза может дать ту же самую интерференционную картину, что и монотонная. Пусть x_l — точка экстремума фазы, тогда $\cos \Phi(x) = \cos \tilde{\Phi}(x)$, где

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \pm \Phi(x), & x \leq x_l \\ 2\pi n \pm \Phi(x), & x > x_l, \quad n = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Даже если фаза $\tilde{\Phi}(x)$ разрывна в точке x_l , ее производная останется непрерывной и ограниченной по модулю той же величиной, что и $\Phi(x)$. Фазовые функции, определенные по (2.13), будем в дальнейшем называть условно монотонными.

Соответствие причинности и монотонности друг другу было исследовано численно. С помощью датчика псевдослучайных чисел с нормальным распределением [47] генерировались реализации аналитического сигнала, периодического и с финитным спектром — $W(j) = [U(j) + iV(j)] \exp(i\alpha_c j)$ при $\alpha_c = 15$. Затем несущая частота α_c изменялась от +15 до -15 с шагом единица. Для каждого значения α_c подсчитывалась степень монотонности фазы по формуле

$$p_m = \left\{ \left[\sum_{j=1}^{N-1} p_+^2(j) - p_-^2(j) \right] / \left[\sum_{j=1}^{N-1} p_+^2(j) + p_-^2(j) \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.14)$$

где

$$p_+(j) = \begin{cases} 0, & p(j) < 0, \\ p(j), & p(j) > 0; \end{cases} \quad p_-(j) = \begin{cases} p(j), & p(j) < 0, \\ 0, & p(j) > 0; \end{cases}$$

$$p(j) = \arg W(j+1) - \arg W(j);$$

$N = 256$ — число отсчетов, $j = 1, 2, 3, \dots, N$. Для тех же значений несущей частоты определяли степень причинности

$$p_c = \left\{ \left[\sum_{j=1}^{NN} |FW(j)|^2 - \sum_{j=NN+1}^N |FW(j)|^2 \right] / \sum_{j=1}^N |FW(j)|^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.15)$$

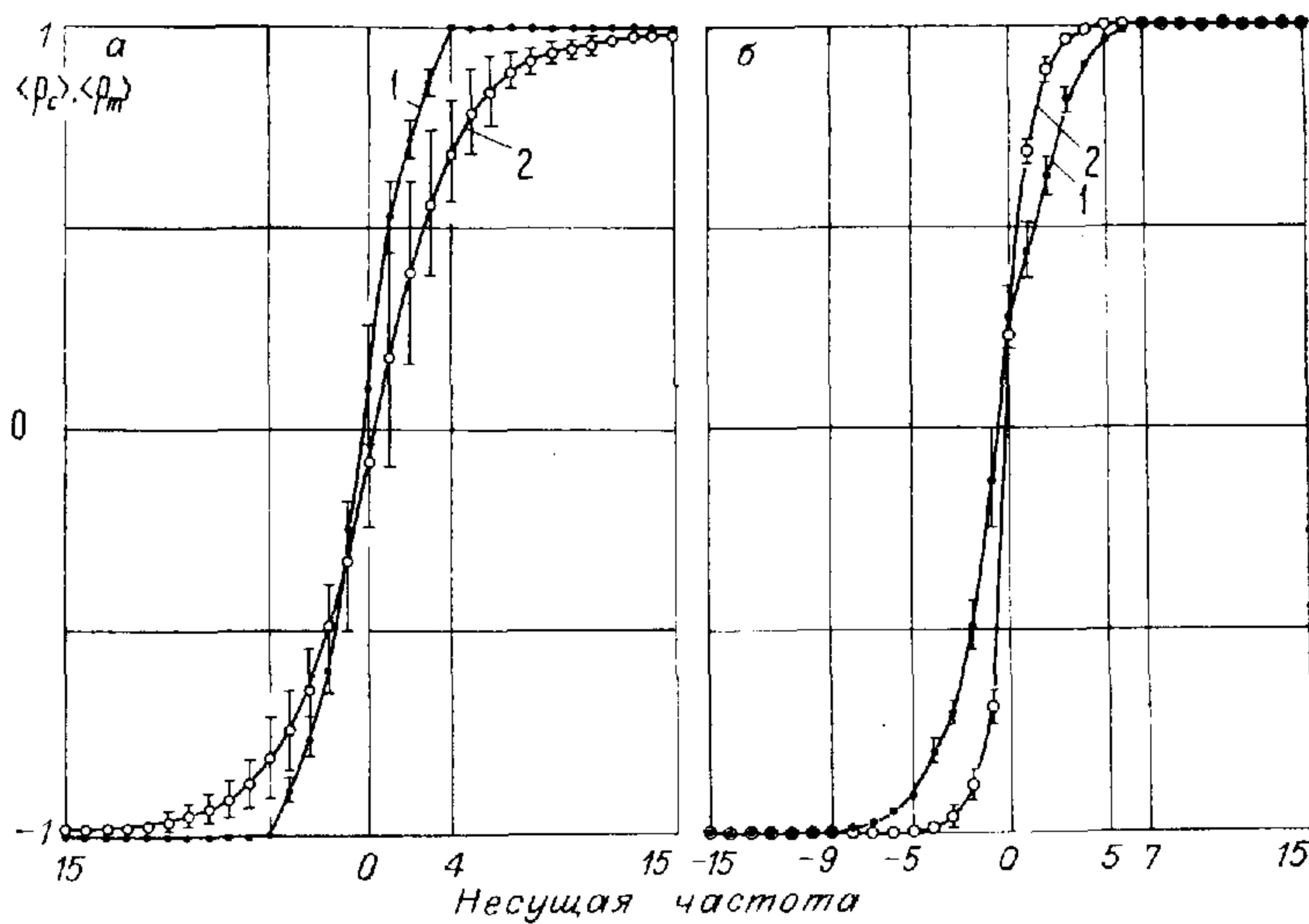


Рис. 2.4. Степень причинности (1) и монотонности (2) для сигнала с финитным спектром и амплитудно-фазовой модуляцией (а) и для сигнала с фазовой модуляцией (б).

где $NN = N/2 + 1$ — частота Найквиста. При фиксированных значениях α_c находили средние значения $\langle p_m \rangle$ и $\langle p_c \rangle$. Усреднение проводили по тридцати реализациям случайного процесса $W(j)$. Определяли среднеквадратичные отклонения σ_{p_c} , σ_{p_m} для p_c и p_m .

На рис. 2.4,а приведены результаты эксперимента для случая, когда процесс $W(j)$ имел как фазовую модуляцию, так и амплитудную. Его спектр мощности был постоянен и отличен от нуля в интервале частот, равном 9, вне этого интервала спектр мощности был равен нулю. На рис. 2.4,б представлены результаты исследования чисто фазового процесса, когда $a(x) = \text{const}$ и спектр мощности процесса был близок к финитному, но его форма не контролировалась.

Анализ и численный эксперимент выявили четыре характерных ситуации:

1. Причинность и монотонность наблюдаются совместно. Это справедливо для функций как с чисто фазовой модуляцией, так и с амплитудно-фазовой. При этом $\alpha_c > \Delta\alpha$, $W_h(x)$ является АС. $\alpha_c \in [-15, -9] \cup [7, 15]$ на рис. 2.4,б.

2. Комплексная функция $W_h(x)$ имеет причинный спектр, является АС, $\alpha_c > \Delta\alpha$, но фаза ее не монотонна. Это наблюдается у функций с финитным спектром, имеющих амплитудно-фазовую модуляцию, $\alpha_c \in [-15, -5] \cup [4, 15]$ на рис. 2.4,а.

3. $W_h(x)$ не имеет монотонной фазы и не является АС, $\alpha_c < \Delta\alpha$, но если интерференционные полосы при этом имеют полный профиль, то у $W_h(x)$ условно-монотонная фаза.

4. Отсутствие причинного спектра у функции $W_h(x)$, она не является АС, $\alpha_c < \Delta\alpha$, но ее фаза монотонна, $\alpha_c \in [-9, -5] \cup [5, 7]$ на рис. 2.4, б.

Первая и вторая ситуации наиболее удобны для применения алгоритмов, основанных на преобразовании Гильберта, и эксперимент должен строиться так, чтобы они реализовались. Ситуации, в которых причинность спектра отсутствует и имеется монотонность или условная монотонность фазы, также не потеряны. Монотонность дает возможность превратить не причинный спектр в причинный и соответственно комплексную функцию в аналитический сигнал. Перейдем к рассмотрению этого вопроса [88].

Пусть функция $W_h(x) = a(x) \exp i\Phi(x)$ имеет монотонную фазу $\Phi(x)$, но не является АС. Если преобразовать переменную x так, что $\Phi[x(\tau)] = \alpha_c \tau$, то спектр функции $W_h(\tau)$ станет значительно уже и будет локализован в области частот вокруг точки α_c . Ширина этого спектра относительно α_c будет определяться только амплитудой $a(\tau)$, которая мало изменится по сравнению с $a(x)$, так как последняя низкочастотна. Такое преобразование возможно и определяется выражением

$$x(\tau) = \Phi^{-1}(\alpha_c \tau), \quad (2.16)$$

где Φ^{-1} — функция, обратная Φ . Однозначность этой обратной функции гарантируется монотонностью прямой функции. Если к тому же наложить условие $\Phi'_x \neq 0$, то обратная функция не будет иметь разрывов, что особенно важно при ее численной реализации (рис. 2.5).

При $a(x) = \text{const}$ $W_h(\tau)$ будет аналитическим сигналом, если же амплитуда не является константой, то степень причинности у $W_h(\tau)$ все же будет выше, чем у $W_h(x)$. Это можно выразить в форме

$$\lim_{a(x) \rightarrow \text{const}} W_h(x) = U(x) + i \left\{ \int_{\tau} HU[x(\tau)] \right\}_{\tau=\tau(x)}. \quad (2.17)$$

Возникает вопрос о реализации описанных операций. Действительно, для того чтобы определить фазу $\Phi(x)$ только по $U(x)$, эту фазу уже необходимо знать для осуществления преобразования (2.16). Можно предположить, что

$$\Phi_0(x) = \text{arctg} \left[\frac{HU(x)}{U(x)} \right] \quad (2.18)$$

будет достаточно для осуществления начального сжатия спектра. Затем эти вычисления повторяются в соответствии с уравнением

$$\Phi_{n+1}(x) = \left\{ \text{arctg} \left[\frac{HU \{ \Phi_n^{-1}(\alpha_c \tau) \}}{U \{ \Phi_n^{-1}(\alpha_c \tau) \}} \right] \right\}_{\tau=\Phi_n(x)/\alpha_c}. \quad (2.19)$$

Выражения (2.16) — (2.19) можно распространить на многомерный случай. Пусть $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$, $t = t(l)$ — параметрические уравнения линии в четырехмерном пространстве и пусть на этой линии амплитуда $a(l) = \text{const}$, а фаза $\Phi(l)$ монотонна или условно монотонна. Аналог выражения (2.16), который осуществляет сжатие l -спектра комплексной функции $W_h(l)$, будет иметь вид

$$l(\tau) = \Phi^{-1}(\alpha_c \tau),$$

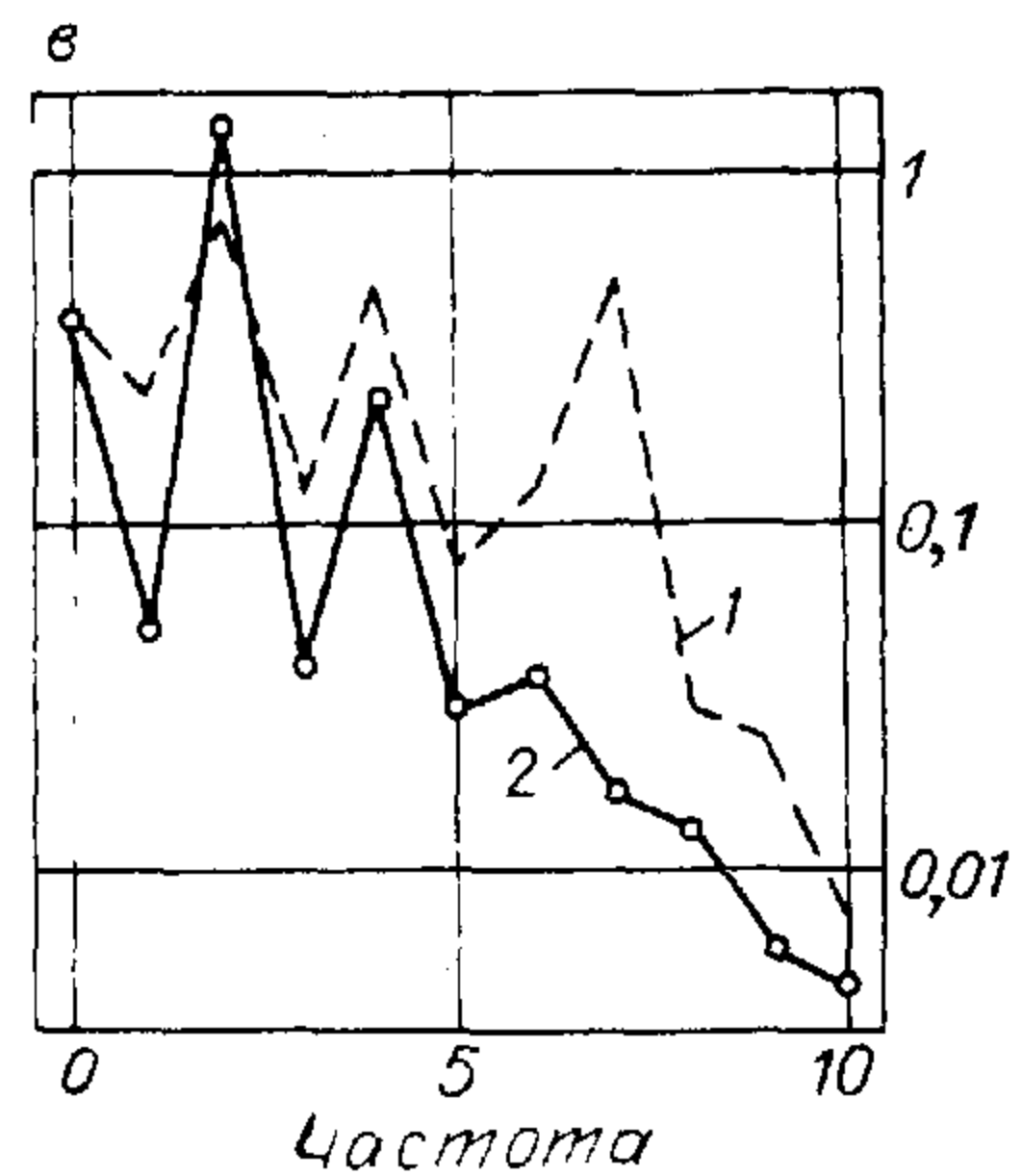
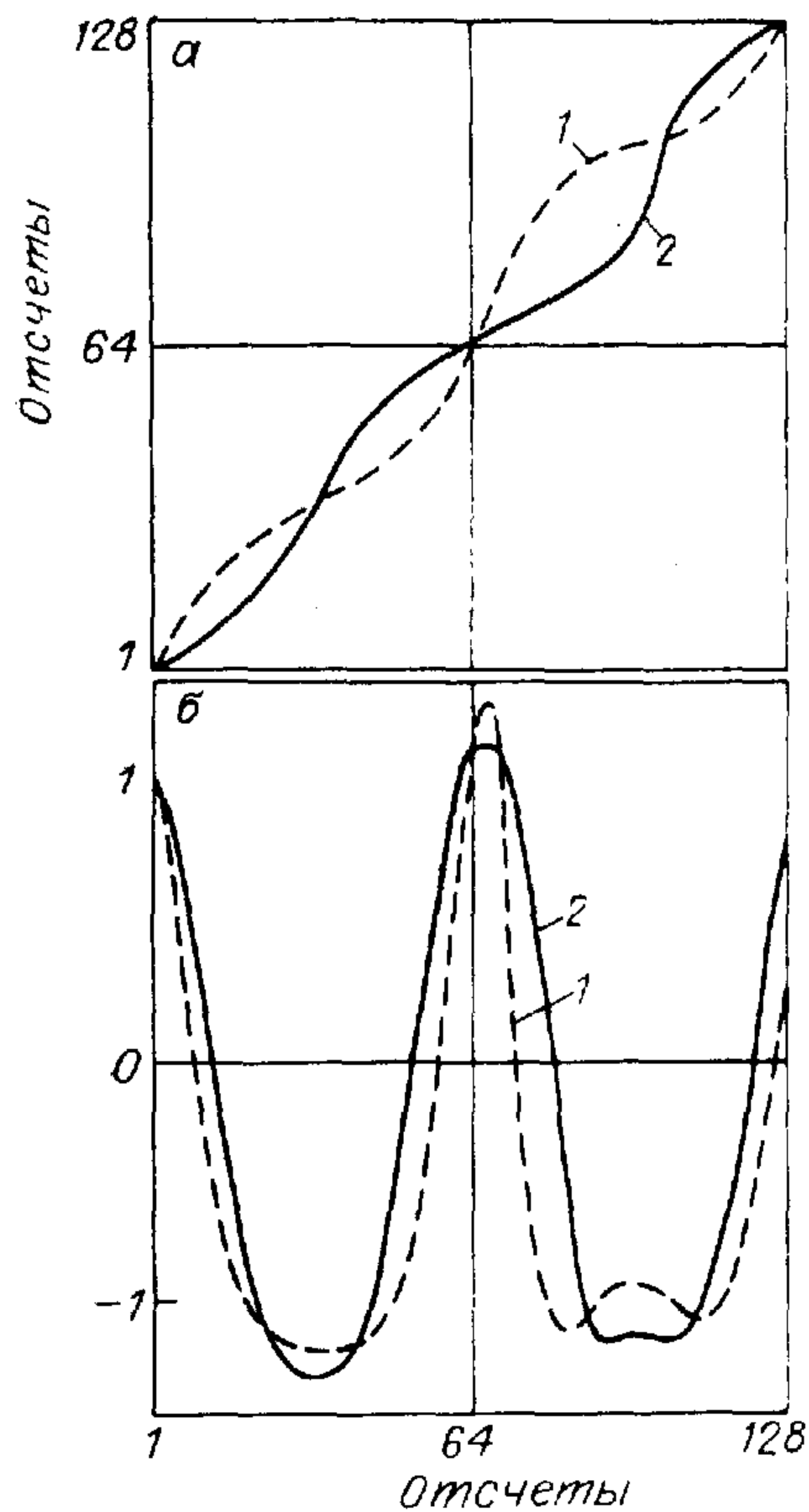


Рис. 2.5. Преобразование сигнала с монотонной фазой.

а — прямая и обратная функции фазы, б — реализации сигналов, в — реализации спектров Фурье; 1 — до преобразования, 2 — после преобразования.

где α_c — несущая частота. Тогда в дополнение к выражениям (2.10) можно записать:

$$V[x(l), y(l), z(l), t(l)] = \left\{ HU[x(\tau), y(\tau), z(\tau), t(\tau)] \right\}_{\tau=\Phi(l)/\alpha_c} \quad (2.20)$$

Легко также видеть, что уравнения для фазы (2.18), (2.19) обобщаются на многомерный случай заменой x на l . Если $a(l) \neq \text{const}$, то (2.20) следует понимать в смысле предела (2.17).

Итерационное уравнение (2.19) исследовано численно. Точно так же, как и в предыдущем эксперименте, генерировались в пределах одного периода реализации случайной фазы $\varphi(j)$, $j = 1, 2, 3, \dots, N$; $N = 256$. Спектр мощности этих реализаций постоянен в интервале частот от $j = 2$ до $j = 5$, при этом $\sigma_c = \pi/5$, а среднее значение фазы равно нулю. Затем к фазе добавлялась линейная составляющая, эта сумма — $\Phi(j) = \varphi(j) + \alpha_c j$ была заведомо монотонной при $\alpha_c = 8$. Строился комплексный процесс

$$W_k(j) = \cos \Phi(j) + i \sin \Phi(j)$$

и вычислялись следующие оценки при изменении α_c от 8 до 0: $\langle p_c \rangle$

для $W_k(j)$, $\langle p_m \rangle$ для $\Phi(j)$,

$$\varepsilon_n = \left\{ \sum_{j=1}^N [\Phi(j) - \Phi_n(j)]^2 / \sum_{j=1}^N \varphi^2(j) \right\}^{1/2},$$

где $\Phi_n(j)$ определяли из итерационного уравнения (2.19) при $n = 4$ и из уравнения (2.18) при $n = 0$. Усреднение проводили по тридцати реализациям случайного процесса для каждого значения α_c независимо. Определялось среднее квадратичное отклонение σ_n для ε_n .

Результаты эксперимента такие:

α_c	$\langle \varepsilon_n \rangle$	σ_n	$\langle \varepsilon_0 \rangle$	σ_0
8	3,6 —3*	1,8 —3	1,5 —2	3,9 —3
7	4,3 —3	1,7 —3	3,1 —2	7,7 —3
6	5,3 —3	1,7 —3	5,0 —2	6,6 —3
5	6,3 —3	1,9 —3	6,6 —2	5,7 —3
4	1,9 —2	3,2 —3	2,8 —1	4,8 —2
3	3,1 —2	6,2 —3	4,6 —1	8,3 —2
2	4,2 —2	2,1 —2	4,9 —1	7,7 —2
1	8,7 —1	2,4 —1	6,0 —1	9,5 —2
0	7,1 0	2,4 0	6,0 0	1,9 0

α_c	$\langle p_c \rangle$	σ_{p_c}	$\langle p_m \rangle$	σ_{p_m}
8	1,0 0	1,6 —6	1,0 0	0,0 0
7	9,9 —1	1,4 —5	1,0 0	0,0 0
6	9,9 —1	4,5 —5	1,0 0	0,0 0
5	9,9 —1	7,4 —5	1,0 0	0,0 0
4	9,9 —1	1,7 —4	1,0 0	0,0 0
3	9,9 —1	2,7 —3	1,0 0	0,0 0
2	9,8 —1	4,7 —3	1,0 0	0,0 0
1	9,7 —1	5,3 —3	9,9 —1	6,3 —4
0	4,2 —3	1,5 —1	6,2 —2	1,8 —1

* Первое число — мантисса, второе — порядок.

Видно, что четыре итерации существенно улучшают оценки в тех случаях, когда $\langle p_m \rangle = 1$ и $\Phi(j)$ монотонна.

Таким образом, в силу наличия в оптической волне высокочастотной временной несущей, а также пространственной, связанной с направлением распространения z , комплексное представление волны имеет причинный временной спектр и причинный z -спектр.

В четырехмерном пространстве можно выделить линии, на которых модулированная по фазе волна как функция параметра l будет иметь причинный l -спектр. Кроме того, линии, где волна не имеет причинного l -спектра, а ее фаза является монотонной функцией параметра l , можно подвергнуть преобразованию типа «растяжение — сжатие» с тем, чтобы на вновь полученной линии наблюдалась причинность l -спектра.

Все это гарантирует, что фаза четырехмерной волновой функции, определенная на линии сканирования с помощью АС, который вводится по параметру линии l , будет соответствующим сечением единственной четырехмерной фазовой функции, определенной АС по времени или направлению распространения.

Определение разности фаз двумерных интерферирующих полей методами дисперсных соотношений и прямой демодуляции. Если логарифм аналитической функции $g(x)$ не имеет особых точек в верхней полуплоскости комплексной переменной $\zeta = x + i\eta$, $\eta \geq 0$, то между $\kappa(x) = \operatorname{Re} \ln g(x)$ и $\varphi(x) = \operatorname{Im} \ln g(x)$ существует взаимосвязь, содержащая преобразование Гильберта. Основопологающей теоремой для установления этой взаимосвязи в классе квадратично интегрируемых функций служит теорема Титчмарша [18, 42, 50, 54]. Однако условие квадратичной интегрируемости не позволяет рассматривать функции, не убывающие при $x \rightarrow \infty$, например, изменяющиеся периодически. Поэтому обратимся к [42], где доказывается теорема, устанавливающая следующее:

$$\kappa(\zeta) = \ln |g(\zeta)| = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |g(s)| \frac{ds}{(s-x)^2 + \eta^2} + c\eta, \quad (2.21)$$

где $c = \limsup [\ln |0 + i\eta|/\eta]_{\eta \rightarrow \infty}$; s — действительная переменная. При этом предполагается, что $g(\zeta)$ является аналитической функцией конечной степени роста [69, 105] при $\eta \geq 0$, там же $g(\zeta) \neq 0$. Кроме

того, существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg |g(x)|}{1+x^2} dx$ — условие Винера — Пэли.

Так как $\ln g(\zeta) = \kappa(\zeta) + i\varphi(\zeta)$ при $\eta \geq 0$ аналитическая функция, то справедливо выражение для полного дифференциала:

$$d\varphi(x, \eta) = \frac{\partial \kappa(x, \eta)}{\partial x} dx + \frac{\partial \kappa(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta. \quad (2.22)$$

Продифференцировав (2.21) по x и η , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(x, \eta)}{\partial x} &= \frac{2\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s) \frac{x-s}{[(s-x)^2 + \eta^2]^2} ds; \\ \frac{\partial \kappa(x, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s) \frac{ds}{(s-x)^2 + \eta^2} + \frac{2\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s) \frac{\eta}{[(s-x)^2 + \eta^2]^2} ds + c. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования. Подставим (2.23) в (2.22), полагая $\eta = 0$, и проинтегрируем полный дифференциал $d\varphi$ по x , получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa(s)}{s-x} ds + l(x), \quad (2.24)$$

где $l(x) = cx + b$; b — произвольная постоянная.

По форме выражение (2.24) отличается от определения АС (2.5) только линейной функцией в правой части, (2.24) называют логарифмическим преобразованием Гильберта [138], а также диспер-

сионным соотношением [129, 139]. Впрочем, последнее название относят также и к (2.5). Впервые подобное соотношение было получено Крамерсом и Кронигом и связывало действительную и мнимую части комплексного показателя преломления [9, 50].

Отметим интересный момент, связанный с реализацией условия, что функция $g(\zeta)$ при $\eta \geq 0$ должна иметь конечную степень роста. Это требование может быть выполнено в двух случаях: во-первых, когда $g(x)$ является АС и имеет причинный спектр, во-вторых, когда $g(x)$ есть ЦФЭТ, спектр ее финитен, но может не быть причинным [18].

В двумерном случае, когда $g(x, y)$ является функцией двух действительных переменных, потребуем единственности двумерной фазы $\varphi(x, y)$. Требование обеспечивается тем, что дисперсионное соотношение, в котором преобразование Гильберта выполняется по аргументу x , должно совпадать с дисперсионным соотношением, в котором аргументом преобразования Гильберта является y . Выразим это в форме

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \underset{x}{H\kappa}(x, y) + xa(y) + b(y) + \text{const} = \\ &= \underset{y}{H\kappa}(x, y) + yc(x) + d(x) + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Одномерные функции в этом выражении подлежат определению.

Без ограничения общности представим логарифм амплитуды в виде

$$\kappa(x, y) = \kappa_+(x, y) + \kappa_1(y) + \kappa_-(x). \quad (2.26)$$

Здесь первое слагаемое не имеет аддитивных одномерных составляющих, они заданы двумя другими слагаемыми. Подставим (2.26) в (2.25) и выпишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} c(x) &= c = \text{const}, \quad a(y) = a = \text{const}, \\ b(y) &= \underset{y}{H\kappa_1}(y) + cy, \quad d(x) = \underset{x}{H\kappa_-}(x) + ax, \\ \underset{x}{H\kappa_+}(x, y) &= \underset{y}{H\kappa_+}(x, y). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Теперь подставим эти равенства в (2.25) и, перейдя снова к функции $\kappa(x, y)$, получим дисперсионные соотношения между фазой и логарифмом амплитуды в двумерном случае:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \underset{x}{H\kappa}(x, y) + \left[\underset{y}{H\kappa}(x, y) - \underset{x}{H\kappa}(x, y) \right]_{x=\text{const}} + l(x, y) = \\ &= \underset{y}{H\kappa}(x, y) + \left[\underset{x}{H\kappa}(x, y) - \underset{y}{H\kappa}(x, y) \right]_{y=\text{const}} + l(x, y), \\ l(x, y) &= ax + cy + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Этот результат был опубликован в работе [84], а затем в уточненном виде в [86]. В [129] также делались попытки обобщения дисперсионных соотношений на двумерный случай. Они основывались на

рассмотрении функции $g(x, y)$ в области двух комплексных переменных $\zeta_1 = x + i\eta_1$ и $\zeta_2 = y + i\eta_2$. Но такой подход не дал положительного результата, так как получающиеся при этом интегральные уравнения не имели в общем случае решения. Поэтому был рассмотрен частный случай, в котором двумерная функция представлялась в виде произведения двух одномерных функций, тогда как дисперсионные соотношения (2.28) носят более общий характер, что явилось следствием физически обоснованного требования единственности двумерной фазы.

Обозначим прописными буквами преобразования Фурье функций, обозначенных соответствующими строчными буквами, и рассмотрим двумерный спектр Фурье величины $\ln g(x, y) = \kappa(x, y) + i\varphi(x, y)$. Из выражения (2.28) и свойства преобразования Гильберта (2.6) следует, что действительная часть этого спектра может быть отлична от нуля только в двух симметричных относительно начала координат квадрантах частотной плоскости (α, β) и на осях α и β . Имея это в виду, из (2.28) получим

$$K(\alpha, \beta) + i\Phi(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta) + (1 + \text{sign } \beta) K_-(\beta) \delta(\alpha) + (1 + \text{sign } \alpha) [K_+(\alpha, \beta) + K_-(\alpha) \delta(\beta)].$$

Видно, что двумерный спектр Фурье функции $\ln g(x, y)$ локализован в одном квадранте плоскости (α, β) , включая особенности на осях координат.

Пусть $g(x, y) = 1 + W(x, y)$ — интерференционное поле и $G(x, y) = |g(x, y)|^2 = |1 + W(x, y)|^2$ — интерферограмма. Такая запись эквивалентна модели (2.1) при $t = t_0$ и $a_r(x, y) \equiv 1$. Для того чтобы применить к этим функциям дисперсионные соотношения, необходимо обеспечить отсутствие нулей у функции $g(\zeta_1, \zeta_2)$ при $\eta_1 \geq 0, \eta_2 = 0$ и при $\eta_1 = 0, \eta_2 \geq 0$, кроме того, там же $g(\zeta_1, \zeta_2)$ должна иметь конечную степень роста. Эти два условия выполняются одновременно, если $|W(x, y)| < 1$ и $W(x, y)$ есть АС как по x , так и по y (2.10):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= U(x, y) + iV(x, y), \\ \underset{x}{H}U(x, y) &= \underset{y}{V}(x, y) = \underset{y}{H}U(x, y). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Выполнение первого условия при этом гарантируется теоремой Руше [72], второго — определением АС (2.29), из которого следует также, что $g(\zeta_1, \zeta_2)$ не имеет одномерных аддитивных составляющих и

$$c = \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow \infty \\ \eta_2 = 0 \\ x = 0}} \sup \frac{\ln |1 + W(\zeta_1, \zeta_2)|}{\eta_1} = a = \lim_{\substack{\eta_2 \rightarrow \infty \\ \eta_1 = 0 \\ y = 0}} \sup \frac{\ln |1 + W(\zeta_1, \zeta_2)|}{\eta_2} = 0.$$

Выражение (2.28) при этом упростится и примет вид

$$\begin{aligned} \arg [1 + W(x, y)] &= \underset{x}{H} \ln |1 + W(x, y)| + \text{const} = \\ &= \underset{y}{H} \ln |1 + W(x, y)| + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В спектральной области (α, β) этому будет соответствовать следующее:

$$(\text{sign } \alpha - \text{sign } \beta) K(\alpha, \beta) = i\delta(\alpha, \beta). \quad (2.31)$$

Из (2.30) видно, что двумерные функции связаны одномерными преобразованиями, а это приводит к сокращению размерности задачи. Предполагая, что на линии сканирования $x = x(l), y = y(l)$ объектное поле $W[x(l), y(l)]$ остается аналитическим сигналом по параметру линии, в (2.30) один из аргументов можно опустить, а другой заменить на l .

Из того, что $|W(l)| < 1$, для всех l следует равномерная сходимость на всей бесконечной оси ряда:

$$\ln G(l) = \ln |1 + W(l)|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{W^n(l)}{n} + (\dots)^*. \quad (2.32)$$

Фурье-преобразование этого ряда будет представлять собой ряд n -кратных сверток спектра аналитического сигнала $W(l)$. В силу равномерной сходимости (2.32) ряд из сверток также будет сходящимся. Но свертка причинных спектров, каким является спектр АС, будет причинной, и ее край, ближайший к началу оси частот, будет совпадать с краем спектра функции $W(l)$. Таким образом, нижняя частота в спектре логарифма фотометрического сечения (скана) интерферограммы — $G(l)$ — будет такой же, что и в спектре аналитического сигнала $W(l)$.

Обозначим символом F_{bc}^+ оператор фильтрации. Фильтр, соответствующий этому оператору, пропускает без искажения все составляющие спектра на частотах $\alpha \in [b, c]$ и полностью подавляет составляющие, лежащие вне этого интервала частот. Аналогично оператор F_{bc}^- соответствует полосе пропускания фильтра $[-b, -c]$, а $F_{bc} = F_{bc}^+ + F_{bc}^-$.

Пусть носителем спектра АС $W(l)$ является интервал $[b, c]$. Тогда, учитывая (2.30), определение преобразования Гильберта и спектральные свойства логарифма интерферограммы (2.32), запишем выражения для разности фаз $\Phi(l)$ интерферирующих полей:

$$\begin{aligned} \Phi(l) + \text{const} &= \arg F_{bc} |g(l)| \exp iH \ln |g(l)| = \\ &= \arg F_{bc}^+ \exp \left[\frac{1}{2} F_{bc}^+ \ln G(l) \right] = \text{arctg} \frac{|g(l)| \sin H \ln |g(l)|}{|g(l)| \cos H \ln |g(l)| - 1}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Последнее равенство в (2.33) выписано из [139], два других имеют перед ним преимущество, так как не требуют знания величины опорной волны, и могут быть применены к интерферограммам общего вида, у которых амплитуды опорной и объектной волн не константы.

При проведении интерференционного эксперимента возможно дополнительно измерить интенсивность опорной волны и разделить на нее сигнал, соответствующий интерферограмме (2.2), при этом она станет ближе к $|g(l)|^2$. Техническое решение, используя-

щее для этой цели последовательное сканирование с промежуточным запоминанием и последующим совмещением во времени интерферограммы и интенсивности опорной волны, описано в [4]. Указанная нормировка интерферограммы делает все три равенства (2.33) эквивалентными по отношению к ней. Это дало возможность в техническом решении [5] ввести цепь автоконтроля, которая дает информацию о правильном функционировании измерительного канала на выходе нуль-индикатора.

Пусть на линии сканирования l -спектр аналитического сигнала $W(l)$ не пересекает другие спектральные составляющие скана интерферограммы $G(l) = |1 + W(l)|^2$. Этого достаточно, чтобы записать соотношение для прямой демодуляции интерферограммы:

$$\Phi(l) + \text{const} = \arg F_{bc}^+ G(l) = \arctg \frac{HF_{bc} G(l)}{F_{bc} G(l)}. \quad (2.34)$$

Оно основано на известном принципе гетеродинамирования, который здесь распространен на случай криволинейного сканирования. Различные модификации этого принципа используются в голографии (голограмма Лейта — Упатниекса) при фазометрическом измерении длины [38]. Применение его для восстановления фазы из интерферограмм впервые описано как метод Фурье-преобразования [137] и независимо — как техническое решение для построения интерференционного датчика волнового фронта [3]. Однако об операторе F_{bc} как фильтре высоких частот при анализе интерферограмм упоминалось ранее [121], но преобразование Гильберта при этом не проводилось. В [122] отмечено, что метод прямой демодуляции реализован наряду с методом хребтовых линий и методом трех интерферограмм для контроля оптики. В более поздней работе [141] метод прямой демодуляции и другие методы из «1» на рис. 2.2 рассмотрены с позиции пространственного синхронного детектирования, но нового качества при этом не возникло. В [130] прямая демодуляция по [137] применяется для анализа двумерных интерферограмм плазмы.

Отличие метода прямой демодуляции по (2.34) от дисперсионных соотношений (2.33) вытекает из сделанного предположения об отсутствии пересечения составляющих скана интерферограммы $G(l)$ в частотной области. Это требует, чтобы функция $W(l)$ имела необходимую несущую частоту, тогда как при получении дисперсионных соотношений предполагалось, что $W(l)$ есть аналитический сигнал, но несущая частота не регламентировалась.

Математическая модель фотометрического сечения интерферограммы. Выше, в разд. 2.2, показано, что интерферограмма может быть проанализирована по своим фотометрическим сечениям — сканам. По-прежнему, имея в виду модель (2.1) при $t = t_0$ и $a_r = 1$, сформулируем условия выбора скана на двумерной интерферограмме [88].

Основное условие состоит в том, чтобы точки экстремумов скана $G[x(l), y(l)]$ были точками экстремумов интерферограммы $G(x, y)$, виды экстремумов также должны совпадать. При этом в си-

лу установленной ранее взаимосвязи между причинностью и монотонностью либо $a(l) \cos \Phi(l)$ есть действительная часть аналитического сигнала $a(l) e^{i\Phi(l)}$, либо $\Phi(l)$ монотонна, условно монотонна и спектр комплексного сигнала $e^{i\Phi(l)}$ будет причинным в дисперсионном смысле, а АС может быть введен с помощью рассмотренного преобразования (2.16), (2.20). Целесообразно также предотвратить излишнее расширение спектра скана $G(l)$, для чего на линии сканирования интерференционные полосы должны мало менять свою ширину.

Интерферограмма будет иметь вид системы колец при $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + \alpha x^2 + \beta y^2$. Кажется бы, такая интерферограмма не может быть с необходимой точностью аппроксимирована ЦФЭТ [34], но следует предположить, что квадратичная зависимость локальна и на бесконечности фаза ограничена или изменяется не быстрее линейной функции. Хотя $\Phi(x, y)$ имеет максимум при $x, y \approx 0$, но если кольца имеют полный профиль, то скан $G(l)$, сформированный в соответствии с условиями выбора, будет обладать теми же самыми свойствами, что и в случае полосчатой интерферограммы, а фаза $\Phi(l)$ будет условно монотонной. Тем не менее без априорной информации о положении экстремумов фазы и о том, минимум это или максимум, в случае, когда интерферограмма имеет вид колец, однозначное восстановление фазы невозможно. Восстанавливается лишь одна из возможных реализаций фазы. Для АС это монотонная фаза. Такая неоднозначность не есть свойство какого-то конкретного алгоритма восстановления, но проявление соответствия двумерного сечения волновой функции в общем случае нескольким четырехмерным волнам.

В оптическом контроле двухлучевые интерферограммы, имеющие вид незамкнутых полос, получаются для плоских поверхностей, поверхностей, приведенных к плоским с помощью компенсатора или специальной оптической схемы, а также для некрутых асферических поверхностей. Для поверхностей с большой кривизной интерферограмму, имеющую кольцевую структуру — одну систему колец, получить обычно проще, чем полосчатую интерферограмму.

Для полосчатой интерферограммы наиболее простая система сканов — это декартова прямоугольная сетка. Интерференционные полосы должны быть наклонены к ее осям под углом, приближающимся к 45° .

Для кольцевой интерферограммы сканирование необходимо проводить в полярной системе координат (ρ, θ) вдоль диаметров, проходящих через центр кольцевой структуры. Координаты центра задаются. Поэтому условно монотонную фазу легко превратить в фазу с экстремумом, умножая мнимую часть АС на знаковую функцию

$$\Phi(\rho, \theta) = \arctg \frac{\text{sign } \xi H U(\rho, \theta)}{U(\rho, \theta)}, \quad (2.35)$$

$$\xi = \begin{cases} \rho, & \theta \in [0, \pi], \\ -\rho, & \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Наряду с незамкнутыми прямолинейными и криволинейными сканами возможны и замкнутые. Они также формируются на основе сформулированного выше условия выбора. Криволинейное сканирование, особенно когда линии сканирования замкнуты, предпочтительнее прямолинейного, потому что в конечной области интерферограммы можно получить скан значительной длины или вообще бесконечный — периодический, если он замкнут. Это уменьшает краевые эффекты. Криволинейное сканирование требует применения специальных разверток в устройствах съема данных, либо оцифровки интерферограммы на очень плотном декартовом растре и организации необходимой криволинейной развертки в памяти ЭВМ. Технические средства ограничивают такие действия. Поэтому будем иметь в виду прежде всего простой случай прямолинейного сканирования, обозначая фотометрическое сечение символом $G(x)$. Ограничимся также анализом полосчатых интерферограмм и кольцевых с одной системой колец, так как они наиболее характерны для оптического контроля. Анализ более сложных интерферограмм будет отличаться только организацией ввода и использованием дополнительной априорной информации о положении экстремальных точек функции $\Phi(x, y)$.

Оценим полуширину $\Delta\alpha$ спектра фотометрического сечения интерферограммы:

$$G(x) = |1 + a \exp i\Phi(x)|^2, \quad \Phi(x) = \varphi(x) + \alpha_c x, \quad a = \text{const.}$$

Предположим, что $\varphi(x)$ — ограниченная, непрерывная, T — периодическая функция. Имея в виду соотношение

$$\left| \frac{d}{dx} \exp i\varphi(x) \right|^2 = \varphi'^2(x) \quad (2.36)$$

и равенство Парсеваля, найдем

$$\frac{\int_0^T \left| \frac{d}{dx} \exp i\varphi(x) \right|^2 dx}{\int_0^T |\exp i\varphi(x)|^2 dx} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |S_W(k)|^2}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_W(k)|^2} = b_W^2, \quad (2.37)$$

$$\frac{\int_0^T \varphi'^2(x) dx}{\int_0^T \varphi^2(x) dx} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |S_\varphi(k)|^2}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_\varphi(k)|^2} = b_\varphi^2.$$

Обозначив $\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(x) dx$, получим

$$b_W = b_\varphi \sigma_\varphi. \quad (2.38)$$

В (2.37) $S_W(k)$, $S_\varphi(k)$ — коэффициенты ряда Фурье (спектры); а b_W и b_φ — нормированные среднеквадратичные ширины спектров

функций $W(x) = \exp i\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно. Формула (2.38) могла бы быть получена как следствие установленной в [102, 103] взаимосвязи между мгновенной частотой сигнала и шириной его спектра, но преимущество приведенного здесь вывода в его простоте, обусловленной рассматриваемым частным случаем $\varphi(x) \in L_2(T)$, $a(x) = \text{const}$. Заметим, что b_W , b_φ и используемое ранее дисперсионное определение (2.12) ширины спектра отличаются только нормировкой.

Для того чтобы функция $W(x) \exp i\alpha_c x$ была АС, положим $\alpha_c = \frac{1}{2} p_W b_W$. При этом минимальную полуширину спектра скана $G(x)$ определим как $\Delta\alpha = p_W b_W = p_W b_\varphi \sigma_\varphi$, где p_W коэффициент, учитывающий форму спектра $S_W(k)$. Предполагая прямоугольную форму $S_W(k)$ с полушириной в N отсчетов, найдем

$$p_W = \frac{\Delta\alpha}{b_W} = 2N \left(N / \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^{1/2} \simeq 2\sqrt{3} \quad \text{при } N \gg 1.$$

Тогда

$$\Delta\alpha = 2\sqrt{3} b_W = 2\sqrt{3} b_\varphi \sigma_\varphi.$$

Оценим сверху минимальное число отсчетов N_p на периоде скана T . По теореме Котельникова $N_p = 2\Delta\alpha T / 2\pi = p_W b_W T / \pi$.

Но $b_W^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi'^2(x) dx$, а из условия монотонности функции разности фаз $|\varphi'(x)| \leq 2\pi q / T$, где q — число интерференционных полос на длине T . Тогда

$$b_W \leq \left[\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{2\pi q}{T} \right)^2 dx \right]^{1/2} = \frac{2\pi q}{T}, \quad N_p \leq 2p_W q. \quad (2.39)$$

Число отсчетов для прямолинейного скана, проходящего через центр кольцевой интерферограммы, определим исходя из функции разности фаз:

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \frac{4\pi q_r}{T^2} x^2,$$

где q_r — число интерференционных колец на длине T . Условие формирования кольцевой структуры на интерферограмме — это монотонность $\Phi(x)$ для $x \in [0, \pm T/2]$. Следовательно, $|\varphi'(x)| \leq \frac{8\pi q_r^2}{T^2} |x|$.

$$\text{Тогда } b_W = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{16\pi q_r}{T^2} \right)^2 x^2 dx \right]^{1/2} = \frac{16\pi q_r}{\sqrt{3} T}.$$

Но верхняя частота волновой функции $\exp i\Phi(x)$ равна $p_W b_W / 2$, поэтому

$$N_p = \frac{p_W b_W T}{2\pi} \leq 5p_W q_r. \quad (2.40)$$

Полученные выражения для числа отсчетов позволяют сравнить различные виды интерферограмм, но в эксперименте их применить трудно, так как коэффициент формы обычно неизвестен. Поэтому следует в таких случаях поступать по правилу, описанному в [44], которое предусматривает качественный визуальный анализ Фурье-преобразования полученных отсчетов и корректировку их числа, с тем чтобы спектр наилучшим образом располагался в области частот.

Что касается количества сканов на полосчатой интерферограмме, то его следует оценивать исходя из априорной ширины спектра фазы, основываясь на теореме Котельникова. Обычно это число равно 20, но следует, видимо, рассчитывать на диапазон от 10 до 60.

Количество диаметральных фотометрических сечений для кольцевой интерферограммы так же, как и в случае полосчатой, можно выбрать исходя из априорных частотных свойств фазы $\varphi(\rho, \theta)$, но имеются особенности. Дело в том, что из-за значительной кривизны параболической составляющей регистрируемые фазовые набег должны быть сравнимы с ней. Это возможно для грубых деталей, обрабатываемых по зонам, однако из-за специфики технологии фазовые набег будут, как правило, аксиально симметричны. Поэтому на кольцевой интерферограмме достаточно проанализировать небольшое число (6—8) диаметральных сканов [35].

При проведении интерференционного эксперимента применяют достаточно серьезные меры по подавлению помех на аппаратурном уровне и интерференционные полосы получаются ясно выраженными. Из такой интерферограммы с точностью не хуже 1/2 полосы функция разности фаз $\Phi(x, y)$ всегда может быть восстановлена. Уже при десяти полосах на интерферограмме это дает относительную погрешность 5%. Но важна не относительная ошибка для функции $\Phi(x, y)$, а предусмотренные стандартом максимальное и квадратичное отклонения от идеальной поверхности $l(x, y)$, т. е.

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{1}{G} \int_G \left[\frac{\lambda}{2\pi} \varphi(x, y) - l(x, y) \right]^2 dx dy},$$

где G — область, занимаемая интерферограммой, и ее площадь.

Практика требует, чтобы была возможность оценивать эти ошибки, когда они составляют $\lambda/10 \dots \lambda/100$ или в радианах $\pi/5 \dots \pi/50$ [75].

Сравним влияние на интерферограмму шума и полезного сигнала. Для этого рассмотрим вариации скана $G(x)$:

1) вызванную полезным сигналом $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \delta G_\varphi &= \left. \frac{\partial G(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \{1 + a^2(x) + 2a(x) \cos[\varepsilon\varphi(x) + \alpha_c x]\}_{\varepsilon=0} = \\ &= -2a(x) \varphi(x) \sin \alpha_c x; \end{aligned}$$

2) вызванную мультипликативным шумом $\mu(x)$:

$$\delta G_\mu = \left. \frac{\partial G(x) [1 + \varepsilon\mu(x)]}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \mu(x) G(x)$$

и 3) аддитивным шумом $\nu(x)$:

$$\delta G_\nu = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [G(x) + \varepsilon\nu(x)] \right|_{\varepsilon=0} = \nu(x).$$

Без ограничения общности положим $l(x, y) = 0$ и определим отношение сигнал — шум при мультипликативном шуме, предполагая, что $a(x) = \text{const}$, а $\varphi(x)$ и $\mu(x)$ не содержат частот выше α_c :

$$\begin{aligned} \xi_\mu^2 &= \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \delta G_\varphi^2(x) dx}{\frac{1}{T} \int_0^T \delta G_\mu^2(x) dx} = \frac{\int_0^T 4a^2 \varphi^2(x) \sin^2 \alpha_c x dx}{\int_0^T (1 + a^2 + 2a \cos \alpha_c x)^2 \mu^2(x) dx} = \\ &= \frac{2a \int_0^T \varphi^2(x) dx}{(1 + 4a^2 + a^4) \int_0^T \mu^2(x) dx} = \frac{2a^2 \sigma_\varphi^2}{(1 + 4a^2 + a^4) \sigma_\mu^2}. \end{aligned}$$

Найдем значение a , обеспечивающее максимум величины ξ_μ^2 :

$$\frac{d\xi_\mu^2}{da} = \frac{\sigma_\varphi^2 (1 - a)}{(1 + 4a^2 + a^4) \sigma_\mu^2} = 0.$$

Отсюда $a = 1$, тогда $\xi_\mu^2 = \sigma_\varphi^2 / 3\sigma_\mu^2$. При аддитивном шуме получим аналогичное соотношение $\xi_\nu^2 = 2\sigma_\varphi^2 / \sigma_\nu^2$. Величины ξ_μ^2 , ξ_ν^2 представляют собой отношения дисперсий приращений функции $G(x)$, обусловленных малыми приращениями полезного сигнала и шумов. Однако требуемая ошибка оценки фазы ($< \pi/50$) как раз является малой, поэтому необходимо обеспечивать соразмерность дисперсии шума величине σ_φ^2 либо за счет аппаратурных решений в эксперименте, либо за счет эффективных алгоритмов обработки данных.

Оценим допустимую величину шума в полосе частот объектного поля, основываясь на его описании аналитическим сигналом. Будем исходить из того, что аналитический сигнал $W(x) = U(x) + iV(x)$ и его оценка $\widehat{W}(x) = \widehat{U}(x) + i\widehat{V}(x)$ — периодические функции, а преобразования Фурье функции $U(x)$ и $\widehat{U}(x)$ ограничены по норме L_1 :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_U(k)| < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{S}_U(k)| < \infty,$$

тогда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_U(k) - \widehat{S}_U(k)| = \varepsilon$. Кроме того,

$$|U(x) - \widehat{U}(x)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} [S_U(k) - \widehat{S}_U(k)] \exp ikx \right| < \varepsilon,$$

$$|V(x) - \widehat{V}(x)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} [S_U(k) - \widehat{S}_U(k)] \operatorname{sign} k \exp ikx \right| < \varepsilon.$$

Оценим модуль разности амплитуд:

$$|a - \widehat{a}| = \frac{|a^2 - \widehat{a}^2|}{|a + \widehat{a}|} < \frac{|U - \widehat{U}| |U + \widehat{U}| + |V - \widehat{V}| |V + \widehat{V}|}{a + \widehat{a}} < 2\varepsilon,$$

так как $a \geq U$, $\widehat{a} \geq \widehat{U}$. Модуль разности фаз

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi| = |\varphi - \widehat{\varphi}| &= \left| \operatorname{arctg} \frac{V}{U} - \operatorname{arctg} \frac{\widehat{V}}{\widehat{U}} \right| = \operatorname{arctg} \left| \frac{V\widehat{U} - U\widehat{V}}{U\widehat{U} + V\widehat{V}} \right| = \\ &= \operatorname{arctg} \left| \frac{V\varepsilon_U - U\varepsilon_V}{a^2 - U\varepsilon_U - V\varepsilon_V} \right| < \operatorname{arctg} \left| \frac{2a\varepsilon}{a^2 - 2a\varepsilon} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{a - 2\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.41)$$

при $\varepsilon < \frac{a(x)}{2} \neq 0$, $|\varepsilon_U| = |U - \widehat{U}| < \varepsilon$, $|\varepsilon_V| = |V - \widehat{V}| < \varepsilon$.

Таким образом, существует верхняя граница, равная $a(x)/2$, для ошибки оценивания ε действительной функции $a(x)\cos\varphi(x)$. До тех пор пока $\varepsilon < a(x)/2$, оценки амплитуды и фазы отличаются от своих истинных значений для всех x на величину, которая стремится к нулю вместе с ε , что означает равномерную сходимость оценок в классе функций с ограниченным по норме L_1 преобразованием Фурье. Этот класс более широкий, чем класс периодических функций с финитным спектром, поэтому для них также будут справедливы упомянутые утверждения. Существование преобразования Гильберта, равномерная сходимость оценок обеспечивают условия корректности по Адамару [40, 91] для задачи определения амплитуды и фазы с помощью аналитического сигнала при сделанных предположениях.

Приведем максимальные ошибки оценки фазы, возможные при данном значении ε , рассчитанные по формуле (2.41):

ε	$[a]$	0,01	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	0,5
$\max \Delta\varphi $	рад	0,02	0,04	0,09	0,25	0,7	4,0	∞
	$[\lambda]$	0,003	0,006	0,02	0,04	0,1	0,6	∞

Из представленных данных видно, что точность оценки фазы выше, чем $2\pi/10$ в чебышевской норме, может быть обеспечена, если

$$|U(x) - \widehat{U}(x)| < 0,2a(x) \text{ и } |V(x) - \widehat{V}(x)| < 0,2a(x),$$

где $a(x) = [U^2(x) + V^2(x)]^{1/2}$.

Перепишем выражение для математической модели интерферограммы применительно к фотометрическому сечению

$$G(x) = B_n \left\{ \left| 1 + W(x) \exp i \frac{2\pi}{T'} qx \right|^2 [1 + \mu(x)] + v(x) \right\} \operatorname{rect} \left(\frac{x}{T'} \right). \quad (2.42)$$

На основе проведенного анализа уточним математическое содержание элементов модели. Аргумент x , который в частном случае совпа-

дает с одной из координатных осей, может быть и параметром при криволинейном сканировании, в обоих случаях должны выполняться условия выбора скана.

$W(x)$ — объектное поле с финитным спектром. Число интерференционных полос q выбирается так, что $W(x) \exp i \frac{2\pi}{T'} qx$ есть аналитический сигнал. Фаза $\Phi(x) = \varphi(x) + \frac{2\pi}{T'} qx$ при этом является монотонной функцией по x . Кроме того, $|W(x)| < 1$ и интерференционное поле $1 + W(x)$ подчиняется дисперсионным соотношениям (2.30). В качестве модели объектной фазы выберем нормальный случайный процесс, реализации которого образуют стационарный ансамбль. Нормальность распределения можно обосновать тем, что фаза является образом оптической поверхности, а технологический процесс формообразования состоит из очень большого числа слабосвязанных элементарных актов. Характеристиками этого процесса будут спектр мощности S_φ^2 и дисперсия σ_φ^2 ; $1 + \mu(x)$ — мультипликативные искажения. Из-за наличия опорной волны эта величина будет аддитивной по отношению к $W(x)$. Физическая природа искажений обусловлена главным образом пространственной неоднородностью интенсивности света на входной апертуре интерферометра. Интенсивность источника света изменяется во времени достаточно медленно, так что имеется возможность получить выборку интерферограмм, не отличимых по $\mu(x)$. Моделировать мультипликативные искажения будем как квадрат модуля комплексного процесса с независимыми стационарными нормальными составляющими $1 + \mu(x) = U_\mu^2(x) + V_\mu^2(x)$. Спектр мощности функций $U_\mu(x)$ и $V_\mu(x) = S_\mu^2(k)$.

Аддитивный шум $v(x)$ вызван частичной когерентностью источника света, переотражением света на поверхностях оптических элементов интерферометра, вуалью фотопленки, либо темновым током детектора, а также сбоями аппаратуры при оцифровке. В общей сумме $v(x)$ выделим изолированные импульсы заданной ширины и полиномиальный (линейный, квадратичный) по x тренд. Моделью аддитивного шума будет квадрат модуля комплексного процесса, независимые составляющие которого имеют нормальное распределение. Процесс будет принадлежать стационарному ансамблю. Спектр мощности процесса — $S_v^2(k)$.

Оператор B_n моделирует нелинейные искажения фотодетектора следующим образом:

$$B_n [G(x)] = \begin{cases} G^n(x), & G(x) < h^{1/n}; \\ h, & G(x) > h^{1/n}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где h — уровень ограничения. Такая модель характерна для фотопленки [115] и неустранима применением сенситометрического клина.

Функция $\operatorname{rect}(x/T')$ моделирует конечность области определения скана интерферограммы, причем при $T \neq T'$ на длине скана не будет укладываться целое число интерференционных полос.

Таким образом, описание интерферирующих полей на основе аналитического сигнала позволило записать математическую модель фотометрического сечения интерферограммы как функцию параметра линии сканирования, причем интерферограмма на этой линии может быть подвергнута прямой демодуляции и для нее справедливы дисперсионные соотношения. Это отличает записанную модель от известных.

Сформулированы условия выбора допустимого фотометрического сечения, заключающиеся в совпадении его экстремумов с экстремумами двумерной интерферограммы. В тех случаях, когда фотометрическое сечение может быть периодически продолжено с сохранением непрерывности объектной фазы, установлена простая взаимосвязь между ширинами ее спектра и спектра объектного поля.

Выяснено, что допустимая величина зашумления интерферограммы в норме пространств L_1 и L_2 должна быть того же порядка, что и требуемая точность восстановления фазы в тех же нормах.

Эти результаты применены ниже для построения алгоритмов оценивания объектной фазы.

2.3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФАЗЫ ИЗ ИНТЕРФЕРОГРАММ

Разработанной математической модели в данном разделе сопоставлена последовательность действий, приводящая к восстановлению объектной фазы.

В связи со сложностью структуры интерферограммы оптимальную оценку фазы в общем случае получить не просто. По этой причине там, где необходимо, будем рассматривать приближения, имея в виду последующий численный анализ выражений для оценок.

В качестве априорной информации о свойствах сигнала и шумов будем использовать предположение о детерминированности объекта контроля, выражающейся в неизменности объектной фазы в пределах выборки интерферограмм, что приводит к применению развитых методов накопления, усреднения. Другие априорные сведения должны позволять оценивать ширину полосы частот объектного поля непосредственно, либо косвенно, используя выражение (2.38).

Эти данные особенно важны при больших значениях шума в интерферограмме для повышения качества оценок, кроме того, они позволят исключить интерактивный режим по крайней мере для однополосчатых интерферограмм.

Оценивание объектной фазы применением прямой демодуляции и дисперсионных соотношений. Рассмотрим зашумленную интерферограмму в линейном приближении:

$$G(x) = |1 + \exp i[qx + \varphi(x)]|^2 [1 + \mu(x)] + v(x).$$

Будем считать $G(x)$ элементом выборки. В качестве оценки фазы $\Phi(x) = \varphi(x) + qx$ воспользуемся выражением (2.34), полученным

по методу прямой демодуляции интерферограммы. Применяя (2.34) к $G(x)$, получим

$$\widehat{\Phi}_q = \arg F_{lr}^+ G(x) = \arg [W_q(x) + v_q(x)] = qx + \varphi(x) + \text{Im} \ln \left\{ 1 + \frac{v_q(x)}{1 + \mu(x)} e^{-i[qx + \varphi(x)]} \right\}, \quad (2.43)$$

где

$$v_q(x) = F_{lr}^+ v(x), \\ W_q(x) = [1 + \mu(x)] \exp i[qx + \varphi(x)],$$

$\widehat{\Phi}_q$ — фаза смеси $[W_q(x) + v_q(x)]$ и одновременно оценка разности фаз интерферирующих полей. При этом предполагалось, что спектр функции $W_q(x)$ причинен, финитен и не пересекается с низкочастотным, финитным спектром функции $\mu(x)$, причем фильтр F_{lr}^+ пропускает $W_q(x)$ без искажений. Отсюда следует, что $HW_q(x) = iW_q(x)$ и, стало быть, $1 + \mu(x)$ есть огибающая функции $W_q(x)$, определенная через аналитический сигнал.

Пусть $v_q(x)$ — стационарный нормальный процесс, статистически независимый от процесса $\mu(x)$. Тогда для любых $\mu(x)$ закон распределения $L(\eta)$ величины $\eta = \widehat{\Phi}_q - \varphi - qx - \text{const} = \widehat{\Phi}_q - \Phi$ будет иметь вид [6, 60]

$$L(\eta) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(1 - \mu)^2}{\langle |v_q|^2 \rangle} \right\} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} z e^{z^2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right] \right\},$$

где

$$z = \frac{(1 + \mu)^2}{\langle |v_q|^2 \rangle} \cos \eta.$$

Плотность вероятности $L(\eta)$ симметрична относительно точки $\eta = 0$, унимодальна и дифференцируема. Запишем уравнение максимального правдоподобия

$$\frac{dL(\widehat{\Phi}_q - \Phi)}{d\Phi} = 0$$

и найдем из него оценку для Φ . В силу свойств распределения $L(\eta)$ единственным корнем этого уравнения будет $\Phi = \widehat{\Phi}_q$. Таким образом, оценка разности фаз интерферирующих полей по методу прямой демодуляции есть оценка максимального правдоподобия.

Эта оценка будет достаточной, так как вся информация о фазе $\Phi(x)$ содержится только в функции $W_q(x)$, которая имеет финитный спектр и без искажений переходит из выборки $G(x)$ в оценку $\widehat{\Phi}_q(x)$.

Определим смещение оценки $\widehat{\Phi}_q(x)$, аргумент x будем опускать. Пусть

$$\rho_q = \left| \frac{v_q}{1 + \mu} \right| < 1, \quad (2.44)$$

тогда

$$\ln \left[1 + \rho_q e^{i(\theta_q - \varphi)} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \rho_q^k e^{ik(\theta_q - \varphi)}.$$

Величина $\theta_q = \arg(v_q \exp(-iqx))$ при любом законе распределения функции $v_q(x)$, принадлежащей к стационарному статистическому ансамблю, будет распределена равномерно в интервале, кратном 2π , и независимо от ρ_q [6].

Найдем математическое ожидание оценки $\widehat{\Phi}_q(x)$:

$$\begin{aligned} E\widehat{\Phi}_q &= \varphi + qx + E \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \rho_q^k e^{ik(\theta_q - \varphi)} = \\ &= \varphi + qx + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ik\varphi} \frac{\rho_q^k}{\rho} E e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

но

$$E_{\theta} e^{-ik\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0.$$

Таким образом, $E\widehat{\Phi}_q = \varphi(x) + qx$ и оценка разности фаз несмещенная. Но по отношению к объектной фазе есть смещение, равно qx , однако эта величина определяется числом полос интерферограммы и может быть устранена (см. с. 82).

Для того чтобы был возможен дальнейший анализ, проведем линейризацию слагаемого, содержащего шум в (2.43). Условием линейризации будет малость величины $\rho_q(x)$ по сравнению с единицей. Это требование обосновывается результатами разд. 2.2, где оценена допустимая величина шума, неустранимого из интерферограммы. Для обеспечения ограниченности $\rho_q(x)$ в дальнейшем не будем предполагать гауссовости $v_q(x)$, а только стационарность $v(x)$ и ее независимость от $\mu(x)$. Получим

$$\operatorname{Im} \ln \left[1 + \frac{v_q}{1 + \mu} e^{-i(qx + \varphi)} \right] = \arg \frac{\rho_q \sin(\theta_q - \varphi)}{1 + \rho_q \cos(\theta_q - \varphi)} \simeq c \rho_q \sin(\theta_q - \varphi), \quad (2.45)$$

где c — константа, выбираемая из условия минимума среднеквадратичного отклонения аппроксимирующей функции в (2.45) от исходной.

Пусть задана выборка $\eta_k = \widehat{\Phi}_q - \varphi(x) - q(x)$ объемом N , состоящая из независимых элементов. Закон распределения такой выборки будет иметь вид $\prod_{k=1}^N L(\eta_k)$. При малых η_k его можно предста-

вить в форме $\sum_{k=1}^N \eta_k^2 + \text{const}$. Кроме того, при малых ρ_q либо $\langle \rho_q^2 \rangle$ распределение $L(\eta_k)$ нормализуется [6]. Отсюда вытекает, что среднее арифметическое $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \widehat{\Phi}_q(x)$ будет оптимальной в смысле мак-

симального правдоподобия оценкой разности фаз при сделанных предположениях.

Рассмотрим процедуру оценивания объективной фазы, когда среднее арифметическое вычисляется для различных значений q . Чтобы реализовать такую оценку $\widehat{\Phi}_N(x)$, необходимо зарегистрировать N интерферограмм, отличающихся числом полос q , при одном и том же состоянии объекта. По каждой интерферограмме вычисляют оценку $\widehat{\Phi}_q(x)$ (2.43), а затем, удалив наклон qx , находят среднее арифметическое

$$\widehat{\Phi}_N = \frac{1}{N} \sum_q [\widehat{\Phi}_q(x) - qx]. \quad (2.46)$$

Оценка $\widehat{\Phi}_N$ будет несмещенной. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{c}{N} \sum_q \rho_q \sin(\theta_q - \varphi) \right\rangle &= \frac{ic}{2N} \langle (1 + \mu)^{-1} \rangle \sum_q \langle e^{-i\varphi} \xi_q - e^{i\varphi} \xi_q^* \rangle = \\ &= \frac{ic}{2N} \langle (1 + \mu)^{-1} \rangle \sum_q [e^{-i\varphi} \langle \xi_q \rangle - e^{i\varphi} \langle \xi_q^* \rangle], \end{aligned}$$

где $\xi_q = v_q e^{-iqx}$.

В силу стационарности $v(x)$, $v_q(x)$ и $\xi_q(x)$

$$\langle \xi_q \rangle = \langle v_q \rangle \exp -iqx = \text{const},$$

но так как величина $v_q(x)$ есть АС и не имеет постоянной составляющей, то

$$\langle \xi_q \rangle = \langle \xi_q^* \rangle = 0.$$

Определим дисперсию оценки $\widehat{\Phi}_N$:

$$\begin{aligned} D\widehat{\Phi}_N &= \frac{c^2}{2N^2} \left\langle \left[\sum_q (\varphi_q - \varphi - qx) \right]^2 \right\rangle = \frac{c^2}{2N^2} \left\langle \left[\sum_q (\xi_q - \xi_q^*) \right]^2 \right\rangle \times \\ &\times \langle (1 + \mu)^{-2} \rangle = \frac{c^2}{N^2} \left\{ \sum_q \sum_p \langle \xi_q \xi_p^* \rangle - \frac{1}{2} \left[\sum_q \sum_p (e^{-i\varphi} \langle \xi_q \xi_p \rangle + \right. \right. \\ &\left. \left. + e^{i\varphi} \langle \xi_q^* \xi_p^* \rangle) \right] \right\} \langle (1 + \mu)^{-2} \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $S(\omega)$ — Фурье-преобразование, а $f(\omega)$ — спектральная плотность величины $v(x)$. В силу стационарности $v(x)$ справедливо [6]

$$\langle S(\omega) S(\omega') \rangle = f(\omega) \delta(\omega + \omega').$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \xi_q \xi_p^* \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(\omega - q) S(\omega' - p) \rangle \Omega(\omega) \Omega(\omega') e^{i(\omega + \omega')x} d\omega d\omega' = \\ &= e^{i(p+q)x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \Omega(\omega) \Omega(q + p - \omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где $\Omega(\omega)$ — симметричное положительное финитное спектральное окно шириной $(r-l)$. По определению всегда $(2p \vee 2q) > (r-l)$.

Стало быть, произведение спектральных окон в (2.47) равно нулю. Отсюда

$$\langle \xi_q \xi_p \rangle = \langle \xi_q^* \xi_p^* \rangle = 0.$$

Теперь рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \langle \xi_q \xi_p^* \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(\omega - q) S^*(\omega' - p) \rangle \Omega(\omega) \Omega(\omega') \exp i(\omega - \omega') \times \\ &\times x d\omega d\omega' = e^{i(q-p)x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \Omega(\omega) \Omega(\omega - q + p) d\omega. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь учтено, что

$$\langle S(\omega - q) S^*(\omega' - p) \rangle = f(\omega) \delta(\omega - q - \omega' + p).$$

Аналогично

$$\langle S^*(\omega' - q) S'(\omega - p) \rangle = f(\omega) \delta(\omega - p - \omega' + q),$$

при $\omega - p - \omega' + q = 0$ найдем

$$\langle \xi_q^* \xi_p \rangle = e^{-i(q-p)x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \Omega(\omega) \Omega(\omega - p + q) d\omega. \quad (2.49)$$

Так как функции под интегралами в (2.48) и (2.49) положительны, сами интегралы также положительны и равны друг другу. Обозначим их символом B_{qp} . Отметим, что

$$(B_{qq} \vee B_{pp}) > B_{qp} = B_{pq} \geq 0.$$

Это условие обеспечивает положительность выражения для дисперсии оценки объектной фазы, которое имеет вид

$$D\widehat{\varphi}_N(x) = \frac{c^2}{N^2} \langle (1 + \mu)^{-2} \rangle \sum_q \sum_p e^{i(q-p)x} B_{qp}. \quad (2.50)$$

Пусть $v(x)$ — белый шум и $f(\omega) = 1$. Тогда корреляция

$$\langle \xi_q \xi_p^* \rangle \langle (1 + \mu)^{-2} \rangle = \frac{E}{\rho} \rho^2(x)$$

не зависит от q и p .

Выберем $|q - p| > r - l$. Это означает, что спектры функций $v_q(x)$ и $v_p(x)$ не пересекаются, точно так же не пересекаются спектральные окна в (2.48) и (2.49), поэтому $B_{qp} = 0$. Выражение при этом упрощается и принимает вид

$$D\widehat{\varphi}_N(x) = \frac{c^2}{N} E \rho^2(x). \quad (2.51)$$

Таким образом, эффективность оценки возрастает пропорционально N .

Найдем $\lim_{N \rightarrow \infty} D\widehat{\varphi}_N = 0$. Стало быть, $\widehat{\varphi}_N(x)$ — состоятельная оценка.

Условиями оптимальности в смысле максимального правдоподобия оценки фазы по методу прямой демодуляции (2.43) были низкочастотность $\mu(x)$, стационарность и нормальность аддитивного шума в полосе объектного поля. Оценка фазы по серии выборочных интерферограмм (2.46), отличающихся числом интерференционных полос, также оптимальна по критерию максимального правдоподобия, но для этого наряду со стационарностью необходима ограниченность и малость амплитуды аддитивного шума в полосе поля $W_q(x)$ по сравнению с $1 + \mu(x)$, гауссовость шума при этом не требуется.

Апостериорно обеспечивать требуемые характеристики шума в интерферограмме следует предварительной обработкой выборочных интерферограмм до применения к ним операторов оценивания фазы. Таким образом, задача оптимального оценивания фазы в рамках сделанных предположений должна содержать в себе как подзадачу оптимальное оценивание интерферограммы. Аналогичная последовательность действий, но не сами оценки, была предложена без обоснования в [109]. Такой двухэтапный подход предлагается также в [22]. С этой точки зрения оценка фазы на основе дисперсионных соотношений (2.33) уже включает в себя оценивание интерферограммы, представляющее собой гомоморфный фильтр для подавления мультипликативной помехи. Следующая за гомоморфным фильтром операция совпадает с прямой демодуляцией интерферограммы (2.34).

Шумы, входящие в математическую модель интерферограммы, имеют различные свойства, поэтому задачу оценки интерферограммы будем решать последовательно, применяя частные алгоритмы. Перейдем к рассмотрению этих алгоритмов.

Медианная фильтрация интерферограммы. Цель медианной фильтрации — устранение импульсного шума [61, 62], применение ее для обработки интерферограмм описано в [31, 59].

Как известно [12, 62], изолированные импульсы шума шириной k или меньше независимо от их амплитуды и формы полностью убираются медианным фильтром длиной $2k + 1$ или больше. Другим свойством медианного фильтра является инвариантность монотонных последовательностей к его применению. В приложении к интерферограмме это означает неизменность переднего и заднего фронтов интерференционных полос и ограничение полос сверху и снизу отрезками, параллельными оси абсцисс. Такой же характер искажений имеет нелинейный детектор с порогом нечувствительности и уровнем насыщения. Поэтому при медианной фильтрации не происходит ухудшения качества интерферограммы, если длина медианного фильтра согласована с нелинейной характеристикой детектора, кроме того, следует ожидать, [60], что ограничения интерференционных полос сверху и снизу в совокупности на 10...15% внесут в восстановленную фазу ошибку того же порядка. В этом, конечно, предстоит еще убедиться при проведении численного эксперимента.

Предположим, что длина фильтра может составлять третью часть периода интерференционной полосы без существенного ухуд-

шения результата — объектной фазы. При этом будут удаляться все изолированные импульсы шума, ширина которых в δ и более раз меньше периода интерференционной полосы.

Фильтрация в полиномиальном базисе. Оператор F_{lr}^+ , входящий в выражения для оценок фазы, реализуется в тригонометрическом базисе, так как именно в нем объектное поле имеет финитное преобразование Фурье и является аналитическим сигналом. Для выполнения преобразования F_{lr}^+ необходимо знать трансформируемую функцию на всей бесконечной оси. Но модель интерферограммы определена на конечном интервале оси x и требует поэтому доопределения. В численной реализации наиболее приемлемо периодическое продолжение исходной функции. Эти вопросы обсуждаются ниже. Отметим, что полиномиальная составляющая аддитивного фона интерферограммы не может быть периодически продолжена с сохранением непрерывности. Применение же четного продолжения [110] приводит к разрыву производной как полиномиальной составляющей, так и самой интерферограммы, кроме того, это увеличивает в 2 раза число обрабатываемых данных.

Отсутствие непрерывности приводит к расширению спектров отрезков полиномов и наложению их на спектры других составляющих интерферограммы, что в конечном счете ухудшает оценку фазы. Линейная и квадратичная зависимости содержатся также в функции разности фаз $\Phi(x)$ и этим отличают ее от объектной фазы. Устранять эти составляющие в обоих рассмотренных случаях будем фильтрацией исходных функций в полиномиальном базисе на основе метода наименьших квадратов.

Рассмотрим устранение линейной и квадратичной составляющих фазы. Будем иметь в виду две задачи. Во-первых, это минимизация различия оценок фазы, полученных по независимым выборочным интерферограммам с целью построения оценки (2.46). При этом находится линейная, а в общем случае и квадратичная составляющая, минимизирующая в $L_2(T)$ разность двух результатов. Во-вторых, удаление полинома, и прежде всего линейной составляющей, дает возможность подвергнуть фазу фильтрации в тригонометрическом базисе. В этой задаче должен минимизироваться критерий, обеспечивающий гладкое сопряжение на краях интервала определения.

Рассмотрим алгоритмы, решающие поставленные задачи. Наиболее простой из них состоит в том, что линейная составляющая $l(x)$ получается как результат минимизации функционала:

$$\mathcal{L} = \int_0^T [\Phi'(x) - \beta]^2 dx,$$

где T — период интерферограммы. Найдем

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\beta} = 0 = \int_0^T [\Phi'(x) - \beta] dx, \quad l(x) = \beta x = \frac{\Phi(T) - \Phi(0)}{T}. \quad (2.52)$$

Предполагая монотонность $\Phi(x)$, получим

$$l(x) = \frac{2\pi q}{N} x,$$

где q — число интерференционных полос на периоде T . В дискретном случае этому выражению будет соответствовать следующее:

$$l(j) = \frac{2\pi q}{N} (j-1), \quad j \in [1, N]. \quad (2.53)$$

Согласно соотношению (2.37), минимизация \mathcal{L} обеспечивает минимум дисперсионной ширины спектра функции $\Phi(x) - \beta(x)$ и, стало быть, придает ей максимальную гладкость.

Отметим, также что из выражения

$$\int_0^T \Phi'(x) dx = -i \int_0^T W'(x) W^*(x) dx \propto \left[\sum_{k=1}^{NN} (k+1) + \sum_{k=NN+1}^N (k-N) \right] / |S_W(k)|^2,$$

где $W(x) = \exp i\Phi(x)$, $NN = N/2 + 1$ — частота Найквиста, следует равенство нулю первого момента квадрата модуля преобразования Фурье $S_W(k)$ функции $W(x)$, когда $l(x)$ определена выражением (2.52), и, следовательно, число интерференционных полос q совпадает с центральной частотой спектра объектного поля k_c .

Упомянутую дисперсионную ширину

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{NN} (j-1)^2 |S_\Phi(j)|^2 \quad (2.54)$$

можно минимизировать непосредственно. Это дает возможность определить β в тех случаях, когда число полос q неизвестно или $\Phi(j)$ — немонотонная функция. В функционале (2.54)

$$S_\Phi(j) = \sum_{k=1}^N \Phi(k) \exp i \frac{2\pi}{N} (k-1)(j-1),$$

$$\Phi(k) = \Phi(k) - \beta(k-1), \quad k \in [1, N].$$

Из условия $d\mathcal{L}/d\beta = 0$ получим

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{NN} (j-1)^2 \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N (k-1) \Phi(n) \cos \frac{2\pi}{N} (k-n)(j-1)}{\sum_{j=1}^{NN} (j-1)^2 \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N (k-1)(n-1) \cos \frac{2\pi}{N} (k-N)(j-1)}. \quad (2.55)$$

Таким образом, алгоритм устранения линейной составляющей по (2.52) — (2.55) является оптимальным в смысле обеспечения наиболее гладкого сопряжения фазы на краях интервала $[1, N]$, его следует применять перед тем, как производить фильтрацию функции фазы $\Phi(x)$ в тригонометрическом базисе.

Другой алгоритм основан на решении задачи

$$\mathcal{L} = \int_0^T [\Phi(x) - \beta x - \gamma]^2 dx = \min \quad (2.56)$$

в дискретном случае

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N [\Phi(j) - \beta(j-1) - \gamma]^2 = \min. \quad (2.57)$$

Найденные значения β и γ будут минимизировать энергию функции $\varphi(x) = \Phi(x) - \beta x - \gamma$, энергию ее спектра, но ширина спектра может даже возрасти, так как в (2.56) отсутствует требование непрерывности на краях интервала.

Рассмотрим пример. Пусть $\Phi(x) = \sin x$, $T = 2\pi$. Тогда по алгоритму (2.52) $\beta = 0$ и сохраняется непрерывность функции $\varphi(x) = \sin(x)$ в точках 0 и 2π .

Из (2.56) найдем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \int_0^{2\pi} [\sin x - \beta x - \gamma] x dx = 1 + \frac{(2\pi)^2}{3} \beta + \pi \gamma = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = \int_0^{2\pi} [\sin x - \beta x - \gamma] dx = \frac{\pi}{2} \beta + \gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{3}{\pi^2}, \\ \gamma = -\frac{3}{\pi}. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x) = \sin x + \frac{3}{\pi^2}x - \frac{3}{\pi}$ при периодическом продолжении в точках 0 и 2π терпит разрыв первого рода. Если сравнить энергии полученных двух функций $\varphi(x)$, то увидим

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \left[\sin x + \frac{3}{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) \right]^2 dx = \pi - \frac{6}{\pi}.$$

Следовательно, алгоритм минимизации (2.56) целесообразно применять для определения минимальной ошибки в $L_2(T)$, но не перед тем как подвергнуть $\Phi(x)$ фильтрации в тригонометрическом базисе.

В дискретном случае, когда заданы отсчеты $\Phi(j)$ и $j \in [1, N]$, неизвестные β и γ задачи (2.57) определяются из нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^N [\Phi(j) - \beta j - \gamma] j = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = \sum_{j=1}^N [\Phi(j) - \beta j - \gamma] = 0; \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\begin{cases} C\beta + D\gamma = Q, \\ D\beta + N\gamma = R; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{QN - RD}{CN - DD'}, \\ \gamma = \frac{CR + QD}{CN - DD'}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^N j\Phi(j); & R &= \sum_{j=1}^N \Phi(j); \\ C &= \sum_{j=1}^N j^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1); \\ D &= \sum_{j=1}^N j = \frac{1}{2} N(N+1). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Квадратичную составляющую фазы можно найти, как и линейную, по методу наименьших квадратов, минимизируя функционал

$$\sum_{j=1}^N [\Phi(j) - \alpha j^2 - \beta j - \gamma]^2. \quad (2.60)$$

При этом получаются нормальные уравнения вида

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = P, \\ B\alpha + C\beta + D\gamma = Q, \\ C\alpha + D\beta + N\gamma = R, \end{cases} \quad (2.61)$$

где

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^N j^2 \Phi(j), \\ A &= \sum_{j=1}^N j^4 = \frac{1}{30} N(N+1)(2N+1)(3N^2 + 3N - 1), \\ B &= \sum_{j=1}^N j^3 = \frac{1}{4} N^2(N+1)^2, \end{aligned}$$

а Q, R, C, D определены в (2.59).

Квадратичная составляющая фазы включает в себя линейную составляющую и алгоритм, построенный в соответствии с (2.60), (2.61), аналогично алгоритму (2.57) — (2.59) не будет обеспечивать непрерывности фазы при ее периодическом продолжении. По этой причине (2.60), (2.61) точно так же, как и (2.57) — (2.59), следует применять только для приведения реализаций фазы к одному началу отсчета и минимизации тем самым их взаимного квадратичного отклонения. После этого необходимо дополнительно минимизировать линейную составляющую по алгоритму (2.54), (2.55), а затем проводить фильтрацию в тригонометрическом базисе.

Устранение полиномиальной составляющей аддитивного фона интерферограммы проводится с целью превращения интерферограммы в знакопеременную функцию, последующего определения числа интерференционных полос и ширины спектра объектного поля. Кроме того, полиномиальная фильтрация уменьшает ширину спектра интерферограммы в тригонометрическом базисе, в результате чего повышается точность оптимальной экстраполяции (см. следующий раздел).

Применим для решения поставленной задачи ортогональные полиномы Чебышева второго рода $U_l(x)$ [80]. Полиномы определяются известной рекуррентной формулой

$$U_{l+1}(x) = 2xU_l(x) - U_{l-1}(x), \quad U_1(x) = 2x, \quad U_0(x) = 1,$$

удобной с вычислительной точки зрения. Особенно важно то, что полиномы $U_l(x)$ ортогональны на интервале $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{1/2}$. Такая весовая функция позволяет уменьшить влияние краев интерферограммы, где интерференционные полосы произвольно обрываются, из-за чего составляющие фона определяются неправильно.

Экстремум функционала

$$\sum_{j=1}^N \sqrt{1-x^2} \left[G(j) - \sum_{l=0}^L c(l) U_l(x) \right]^2,$$

где $x = h(j - N - 1)$, $h = \frac{2}{N-1}$, обеспечивают коэффициенты разложения, определяемые по формуле

$$c(l) = h \sum_{j=1}^N \sqrt{1-x^2} G(j) U_l(x). \quad (2.62)$$

Хотя $U_l(x)$ ортогональны на непрерывном множестве точек интервала $[-1, 1]$, но при $N > 100$ и $l = 3 \dots 5$ следует ожидать, что погрешность в (2.62), обусловленная дискретностью интервала, будет невелика.

Оптимальное продолжение скана интерферограммы за пределы области определения. Если выбранная кривая сканирования замкнута и принадлежит области определения интерферограммы, то проблемы продолжения не возникают, так как скан является периодической функцией аргумента x . Однако обычно линии сканирования прерываются на внешних границах области определения интерферограммы. Кроме того, эта область может быть многосвязной и тогда появятся разрывы скана еще и на внутренних границах. Поэтому в результате сканирования интерферограммы скан окажется определенным лишь на нескольких конечных интервалах оси x , будет состоять из отдельных фрагментов. Необходимо доопределить скан интерферограммы там, где он не задан так, чтобы условия (2.10) выполнялись для объектного поля, либо невязка была минимальной.

Задача в такой постановке имеет множество решений, но вводимые ниже структурные ограничения, критерий оптимальности,

а также учет априорной информации об интерферограмме дают основания для выбора единственного.

Пусть $U(x)$ — ограниченная функция, определенная для всех $x \in (-\infty, \infty)$, а скан интерферограммы $G(x)$ содержит известные фрагменты этой функции. Пусть далее $\tilde{U}(x)$ совпадает с $U(x)$ в пределах скана. Введем функцию $\Omega(x)$, интегрируемую в квадрате и имеющую низкочастотный спектр, не пересекающийся со спектрами функций $U(x)$, $\tilde{U}(x)$. Рассмотрим равенство, вытекающее из свойств преобразования Гильберта [14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2(x) [U(x) - \tilde{U}(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2(x) \left\{ H_x [U(x) - \tilde{U}(x)] \right\}^2 dx. \quad (2.63)$$

Устремим функцию $\Omega(x)$ к единице в пределах скана и к нулю вне его. Левая часть выражения (2.63) будет при этом стремиться к нулю по определению, а спектр функции $\Omega(x)$ расширяться. Когда спектр станет широким настолько, что пересечется со спектрами $U(x)$ и $\tilde{U}(x)$, равенство (2.63) перестанет быть справедливым. Чтобы это нарушение равенства проявилось при возможно меньшем значении его левой части, необходимо обеспечить как можно большую узкополосность функций $U(x)$ и $\tilde{U}(x)$. Апостериорно можно уменьшить ширину спектра функции $\tilde{U}(x)$ за счет более гладкого сшивания отдельных фрагментов скана интерферограммы и более гладкого продолжения его за пределы области определения интерферограммы.

Таким образом, для того чтобы Гильберт-трансформанта функции $\tilde{U}(x)$ была наиболее близка к истинной, необходимо, чтобы операция продолжения обеспечивала минимальную ширину спектральных полос функции $\tilde{U}(x)$ при заданных фрагментах $U(x)$. В этом состоит критерий оптимальности. Он соответствует выводам [36] о том, что преобразование Гильберта от фрагмента узкополосного процесса тем ближе к истинному, чем узкополоснее процесс.

Рассмотрим ограничения, вносимые структурой (ЭВМ). Наиболее эффективным и технически обеспеченным алгоритмом для Фурье-трансформации последовательности отсчетов является быстрое преобразование Фурье (БПФ) [76]. На его основе легко реализуются преобразования Гильберта и другие виды линейных фильтров, используемых при анализе интерферограммы. Но алгоритм БПФ предполагает, что отсчеты заданы на окружности, стало быть, они могут соответствовать только периодической функции. По этой причине скан интерферограммы следует продолжить на ось x также периодически.

Период продолжения T и расстояние между отдельными фрагментами скана можно выбрать на основе априорной информации о свойствах интерферограммы. Информация заключается в том, что разность фаз объектного и опорного полей имеет значительную линейную, квадратичную или близкую к ним составляющую, чем и вызвана полосчатая структура интерферограммы. Линейное продолжение этой составляющей с сохранением непрерывности как ее са-

мой, так и производной, соответствует введенному критерию оптимальности, так как ширина спектра сигнала (2.37) относительно некоторой центральной частоты определяется производной фазы за вычетом линейной функции. Следовательно, необходимо создать условия для появления после интерполяции дополнительных полос или их частей, причем ширина новых полос должна мало отличаться от ширины соседних заданных полос.

Перейдем к синтезу и исследованию алгоритмов продолжения. Пусть скан интерферограммы представлен отсчетами $j \in N = \{1, 2, 3, \dots, N_c\}$. Отсчеты дискретного преобразования Фурье этого скана будут иметь вид

$$S(k) = \sum_{j=1}^{N_c} g(j) \exp [i2\pi (j-1)(k-1)/N_c].$$

Введем неотрицательную функцию веса $r(k)$ и определим ширину спектральной полосы выражением

$$\mathcal{L}[g(j)] = \sum_{k=1}^{N_c} r(k) |S(k)|^2. \quad (2.64)$$

Пусть далее при $j \in M \subset N$ $g(j)$ не определены, их требуется интерполировать, а при $j \in N \setminus M$ $g(j) = b(j)$.

Оптимизируемая функция (2.64) квадратична относительно аргументов $g(j)$. Найдем частные производные $\partial \mathcal{L} / \partial g(l)$, приравняем их нулю и получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $g(l)$, $l \in M$:

$$\left[\sum_{j \in M} g(j) + \sum_{j \in N \setminus M} b(j) \right] \sum_{k=1}^{N_c} r(k) \cos \frac{2\pi}{N_c} (j-l)(k-1) = 0. \quad (2.65)$$

Решение этой системы определяет интерполированные отсчеты скана интерферограммы в соответствии с критерием минимума ширины спектральной полосы.

Так как рассмотренный алгоритм обеспечивает наилучшее вычисление преобразования Гильберта, будем его в дальнейшем называть H -оптимальным.

Задача о продолжении конечной дискретной последовательности данных рассматривалась в [94, 112, 119, 132, 134, 135]. При этом получалась система линейных уравнений, аналогичная (2.65). Отличие приведенного здесь вывода от известных [119, 134] в том, что система (2.65) получена как результат минимизации целевой функции (2.64), тогда как в [119, 134] решается интегральное уравнение типа свертки.

Матрица системы (2.65) является положительно определенной, что гарантирует существование решения. Доказательство этого свойства матрицы приводится в [134]. Оно основано на применении равенства Парсеваля к положительной целевой функции (2.64).

Для численного решения системы (2.65) будет в дальнейшем применяться алгоритм гауссова исключения, реализованный в виде подпрограмм в [100].

При выборе функции веса $r(k)$ возможны варианты. Надо иметь в виду, что те частоты k , где $r(k)$ мала, дают больший вклад в значения интерполируемых отсчетов и, наоборот, частоты, где функция веса велика, подавляются.

Выберем $r(k)$, основываясь на информации о ширине и локализации полосы частот интерполируемой функции:

$$r(k) = \begin{cases} 0, & k \in [k_c \pm \Delta k], \\ 1, & k \notin [k_c \pm \Delta k], \end{cases} \quad (2.66)$$

где k_c — несущая частота, Δk — полуширина полосы частот. Такой вид $r(k)$ позволит сохранить спектр интерполируемой функции, располагающийся в интервале частот

$$k_c \pm \Delta k.$$

Интерферограмма является положительной функцией, но H -оптимальный алгоритм не содержит ограничения на положительность, поэтому после его применения к интерферограмме могут появиться отрицательные значения. Это особенно вероятно при близких значениях амплитуд объектной и опорной волн, когда глубина модуляции интерферограммы велика. Отрицательные значения делают невозможным непосредственное применение алгоритма восстановления, основанного на дисперсионных соотношениях, по которому должен вычисляться логарифм интерферограммы.

Учесть условие положительности интерферограммы возможно с помощью другого алгоритма, который относится к классу итерационных алгоритмов восстановления сигналов с финитным спектром [94, 108, 112, 132, 133] и сводится к решению итерационного уравнения

$$g_{n+1}(j) = b(j) + (1-T)BPg_n(j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_c. \quad (2.67)$$

Здесь P — оператор ограничения динамического диапазона:

$$Pg(j) = \begin{cases} g(j), & p_d < g(j) < p_a; \\ p_a, & g(j) > p_a; \\ p_d, & g(j) < p_d. \end{cases}$$

Когда уровни $(p_a \wedge p_d) > 0$, этот оператор накладывает условие положительности;

B — оператор ограничения спектральной полосы,

$$Bg(j) = \sum_{k=k_c-\Delta k}^{k_c+\Delta k} S(k) \exp [i2\pi (k-1)(j-1)/N_c];$$

T — оператор ограничения интервала,

$$Tg(j) = \begin{cases} g(j), & j \in N \setminus M, \\ 0, & j \in M; \end{cases}$$

$$b(j) = \begin{cases} b(j), & j \in N \setminus M, \\ c(j), & j \in M, \end{cases}$$

где $c(j)$ — некоторое начальное условие.

Сходимость итерационного процесса (2.67) обсуждается и доказывается в [108, 113]. Она обусловлена тем, что всевозможные последовательности $g_k(j)$, $j \in N$ образуют в N -мерном евклидовом пространстве замкнутое, ограниченное, а потому компактное [43] подмножество $S_m = \{g_k(j) : \|g_k(j)\| < m\}$. Кроме того, композиция операторов ТРВ отображает S_m в себя, является строго не расширяющей и имеет вследствие этого в S_m единственную неподвижную точку, к которой сходится последовательность итераций $g_n(j)$. Причем получающееся решение не зависит от начальных условий $c(j)$. Начальные условия определяют только число итераций, необходимых для получения решения с заданной точностью [64, 113].

Если заменить в (2.65) функцию веса $r(k)$, определяемую выражением (2.66), величиной $1 - r(k)$ и отбросить оператор P в (2.67), то (2.65) и (2.67) будут представлять собой два способа решения одной и той же задачи [134].

Поскольку решение системы (2.65) единственно и H -оптимально, то наличие оператора P , казалось бы, должно приводить к неоптимальности решения итерационного уравнения (2.67) в отношении преобразования Гильберта. Это не так в тех случаях, когда уровни p_a и p_d совпадают с наибольшим и соответственно наименьшим значениями решения системы (2.65). Но так как эти значения определяются только приближенно, исходя из известных отсчетов интерферограммы, решение уравнения (2.67) не будет H -оптимальным.

Для оценки точности двух рассмотренных алгоритмов продолжения проводили численные эксперименты [88]. Первый из них строился так. Генерировали нормальный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью в полосе частот $k_c \pm \Delta k$. Число отсчетов N_c составляло 64. Этот процесс был исходным. Затем часть отсчетов ΔN в конце интервала $[1, N_c]$ полагалась неопределенной и интерполировалась. Исходный и интерполированный процессы подвергали преобразованию Гильберта, образовывались два АС и вычислялись их фазы, которые сравнивались между собой на интервале $[1, N_c - \Delta N]$. В качестве меры совпадения использовались величины $\langle \epsilon_\varphi \rangle$ (2.8). Усреднение проводили по пятидесяти реализациям случайного процесса, для ϵ_φ определяли среднее квадратичное отклонение $\sigma_{\epsilon_\varphi}$. При интерполяции функция $r(k)$ соответствовала полосе частот исходного процесса. Аналогично строился оператор B . Уровни оператора P определяли как наибольшее и наименьшее значения исходного случайного процесса. Количество итераций по алгоритму (2.67) ограничивалось числом 100, но итерационный

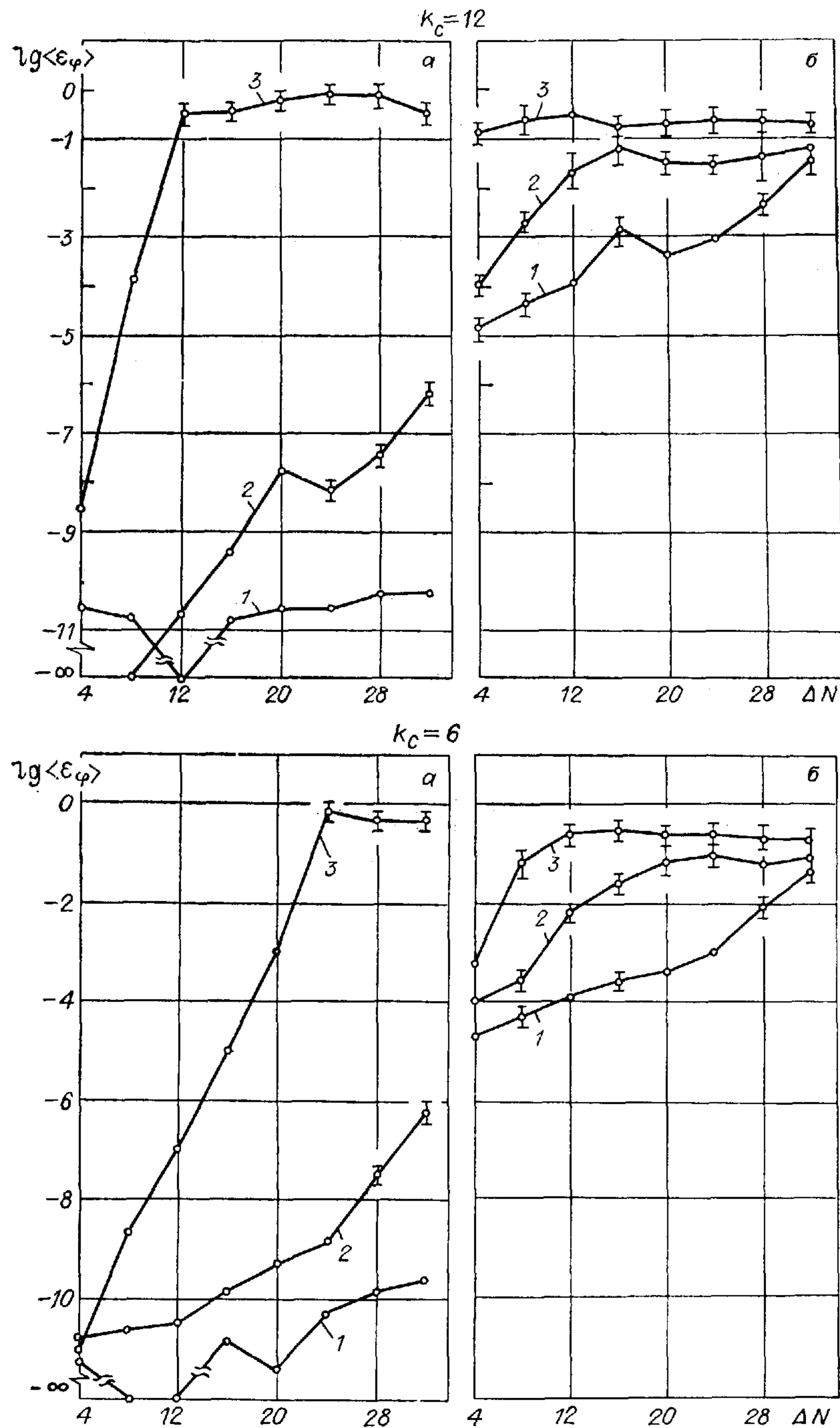


Рис. 2.6. Точность продолжения за пределы интервала определения при совпадении спектральной полосы сигнала со спектральной полосой интерполяции. а — H -оптимальное продолжение, б — итерационное продолжение; $k_c = 6$: 1 — $\Delta k = 1$; 2 — $\Delta k = 3$; 3 — $\Delta k = 5$; $k_c = 12$: 1 — $\Delta k = 1$; 2 — $\Delta k = 5$; 3 — $\Delta k = 11$.

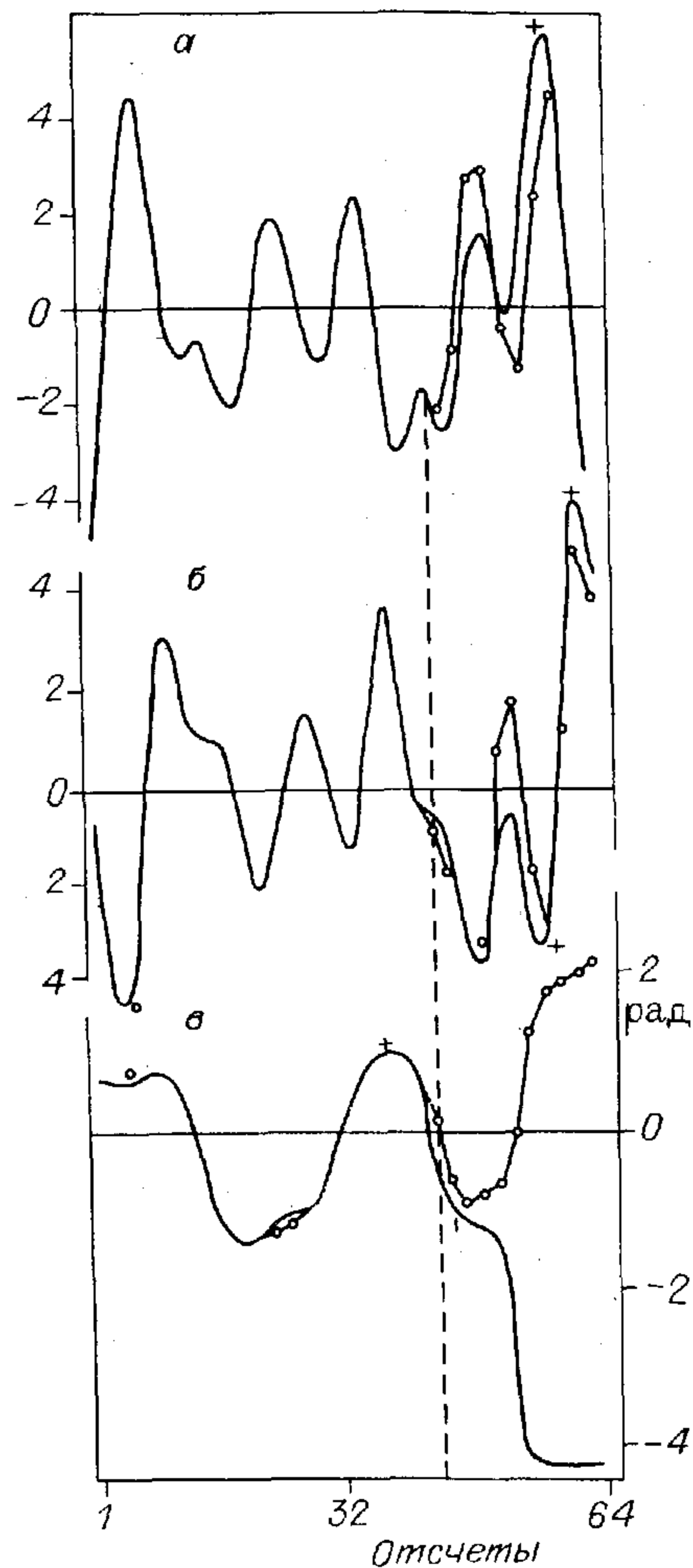


Рис. 2.7. Продолжение за пределы интервала определения, $k_c = 6$, $\Delta k = 5$. а — действительная часть сигнала, б — мнимая часть сигнала, в — фаза сигнала; — эталонное значение, \circ итерационное продолжение, + оптимальное продолжение, — — — начало интервала продолжения.

процесс прекращался, если относительное различие в норме $L_2(N_c)$ двух соседних итерационных приближений не превышало 0,0001 (рис. 2.6). На рис. 2.7 показана одна реализация интерполируемого процесса.

Второй эксперимент отличался от первого тем, что полоса частот $k_c \pm \Delta k$, у $r(k)$ и оператора B при интерполяции не совпадала с полосой частот $k_c \pm \Delta k$ исходного процесса. Такие рассогласования в реальном эксперименте всегда будут присутствовать (рис. 2.8).

Публикации [108, 112, 119, 131, 134] содержат описания численных экспериментов по продолжению сигналов за пределы их области определения, при этом использовались варианты рассмотренных алгоритмов. Но исследовался там сам сигнал, либо его преобразование Фурье. Тогда как в описанных здесь экспериментах оценивается фаза сигнала в пределах области его определения.

Из результатов численного эксперимента следуют выводы. В тех случаях, когда спектральная полоса, используемая при интерполяции, совпадает со спектральной полосой интерполируемого сигнала или шире ее, а число интерполируемых точек не превышает $(0,05 \dots 0,1) \cdot N_c$, H -оптимальный алгоритм дает очень хороший результат. В этих же условиях итерационный алгоритм работает менее точно, но для практических целей этого достаточно. С увеличением числа интерполируемых точек и расширением полосы сигнала точность обоих алгоритмов падает. Если же спектральная полоса интерполяции не согласована с полосой сигнала или уже ее, то результат нельзя считать приемлемым. Таким образом, при продолжении интерферограммы за пределы области ее определения целесообразно ограничиться дополнением неполных интерференционных полос, оценка ширины спектральной полосы интерферограммы не должна быть заниженной.

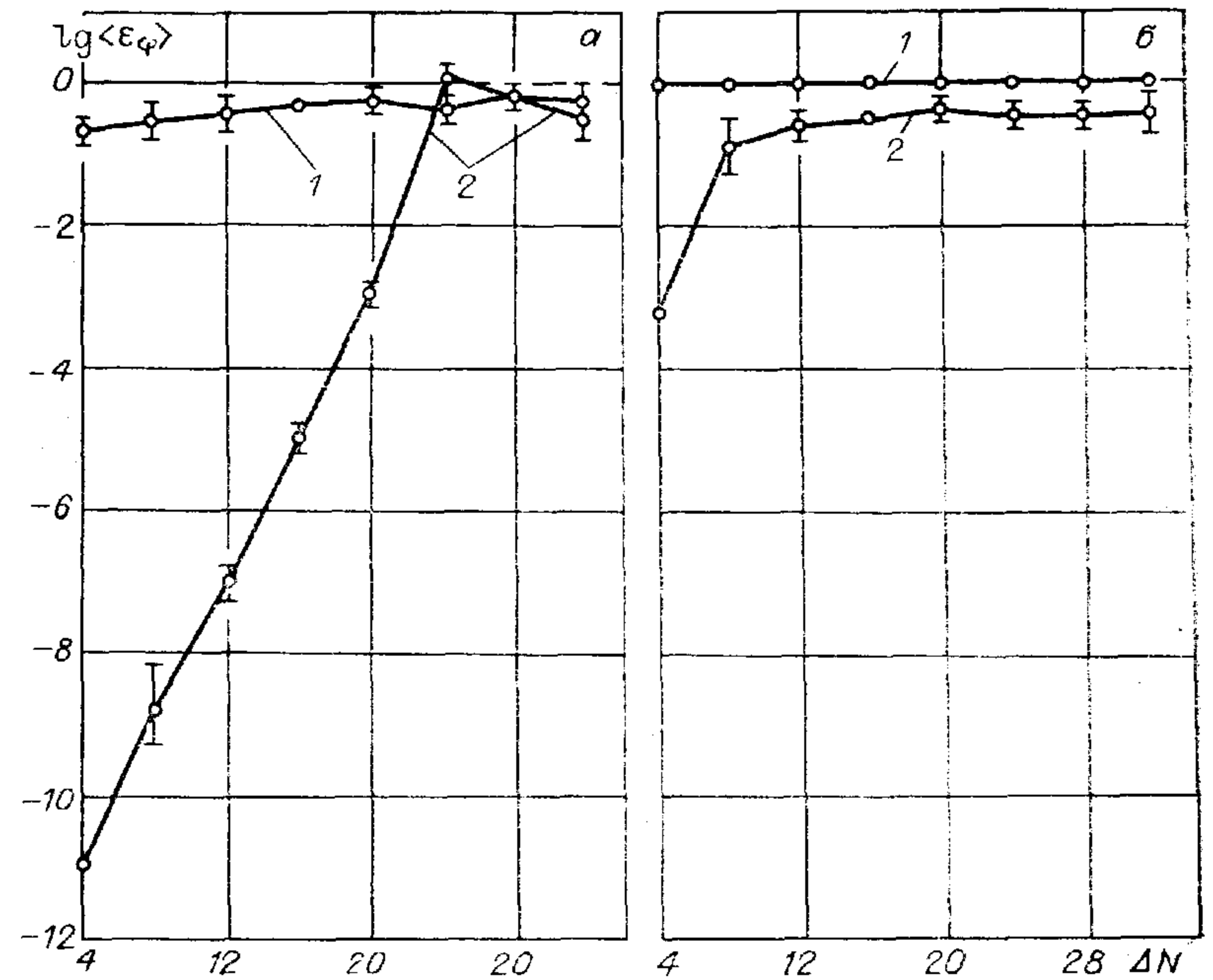


Рис. 2.8. Точность продолжения за пределы интервала определения при несовпадении спектральной полосы сигнала со спектральной полосой интерполяции.

а — H -оптимальное продолжение; б — итерационное продолжение; полоса сигнала $k_c \pm \Delta k = 6 \pm 3$; полоса интерполяции $k_c \pm \Delta k$: 1 — 6 ± 1 , 2 — 6 ± 5 .

Определим ширину и локализацию спектра объектного поля. В разд. 2.3 показано, что центральная частота спектра объектного поля k_c совпадает с числом полос интерферограммы q . Поэтому рассмотрим алгоритм определения q , который должен реализоваться без участия оператора.

После того как фильтрацией в базисе ортогональных полиномов Чебышева устранен полиномиальный тренд, для скана интерферограммы будет справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^N G(j) (1 - x^2)^{1/2} = 0, \quad x = \frac{2}{N-1} (j - N - 1).$$

Из него следует, что интерферограмма — знакопеременная функция. Основываясь на изменении знака интерферограммы, можно определить середины положительных и отрицательных полуволн и расстояние между этими серединами (см. рис. 2.12). Середину можно определить, либо используя алгоритм скелетонизации [75], либо как номер отсчета, ближайший к центру тяжести полуволны. Для симметричных интерференционных полос эти определения совпадут. Первая полуволна и последняя могут быть искаженными из-за произвольного обрыва интерференционных полос на краях скана, поэтому определим среднюю ширину интерференционной полосы τ

как удвоенное отношение расстояния между серединами второй полуволны и предпоследней к числу полуволн на этом интервале. Определим также локальную ширину интерференционной полосы τ_q как расстояние между серединами соседних полуволн одного знака. Целое число интерференционных полос q , которое будет иметь интерферограмма после ее оптимального продолжения, определим из соотношения

$$\tau q = T, \quad (2.68)$$

где T — период продолжения — наименьшее целое число $\geq N$.

Полученное число q может быть завышено из-за того, что медианный фильтр пропустит импульсы шума, ширина которых больше $k+1$. К тому же длина фильтра выбиралась малой, чтобы не исказить интерферограмму. Однако с целью счета полос следует дополнительно осуществить медианную фильтрацию с максимально возможной длиной фильтра, используя найденное значение τ . Можно выбрать длину фильтра равной $\frac{2}{3}\tau_{\min} - 1 = 2k + 1$. При этом горизонтальный участок на интерференционной полосе составит около одной трети ее ширины. Если после применения медианного фильтра с такой длиной q не изменится, значит оно определено правильно, иначе указанную процедуру следует повторить, увеличивая при этом длину фильтра.

Если локальная ширина полос на краях скана интерферограммы значительно отличается от средней — τ , что характерно для кольцевых интерферограмм, то период продолжения, определенный по (2.68), не будет оптимальным. Его необходимо скорректировать, для того чтобы локальные ширины соседних полос на краях скана после продолжения были близки друг другу. Это можно сделать так:

$$T = N + \frac{\tau_q}{\tau}(T - N), \quad (2.69)$$

где τ_q определяется как сумма расстояний между серединами второй и третьей полуволн, предпоследней и той, которая перед ней. Способ определения периода по (2.69) более общий, чем по (2.68), и его целесообразно применять также для полосчатых интерферограмм.

Ширину спектра объектного поля определим в форме

$$\Delta\alpha_W = p_W \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left[\Phi'(x) - \frac{2\pi q}{T} \right]^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Пусть $R(j)$, $j \in [1, L]$ — номер отсчета, совпадающего с серединой j -й полуволны. Примем кусочно-линейную модель фазы $\Phi(x)$, тогда без учета первой и L -й полуволн получим дискретный аналог предыдущего выражения

$$\Delta k_W = \text{IFIX} \left\{ p_W \pi N \frac{\sum_{j=3}^{L-1} [R(j) - R(j-1)] \left[\frac{1}{R(j) - R(j-1)} - \frac{L-3}{R(L-1) - R(2)} \right]^2}{R(L-1) - R(2)} \right\}^{1/2},$$

где IFIX — функция Фортрана.

Коэффициент p_W , учитывающий форму спектра объектного поля, необходимо подбирать экспериментально. В пределах серии деталей, проходящих одинаковую стадию обработки, он будет постоянным.

Структура алгоритма оценивания объектной фазы. Последовательность действий, приводящая к восстановлению фазы из интерферограммы, следует из выражения (2.43), (2.46). При этом обеспечивается оптимальность оценки фазы в смысле максимального правдоподобия.

Как отмечено выше (разд. 2.3), оценивание фазы включает в себя оценивание интерферограммы. Оптимальность оценки фазы в этом случае непосредственно не зависит от процедур оценивания интерферограммы, требуется лишь, чтобы шумы $\mu(x)$ и $\nu(x)$ удовлетворяли условиям, при которых получено выражение (2.43). Кроме того, усреднение оценки фазы (2.43) внутри группы интерферограммы с разным числом полос по (2.46) позволит повысить ее эффективность.

Отсюда вытекают требования к оцениванию интерферограмм. Во-первых, оно должно минимально искажать полезный сигнал — объектное поле, сохраняя этим потенциальную возможность улучшить оценку усреднением. Во-вторых, каждая частная процедура, частично устраняя адекватные ей помехи, должна улучшать ситуацию для последующих действий.

Первое требование будет удовлетворено, если длина медианного фильтра и степень полинома, подавляемого в аддитивном фоне, будут подбираться индивидуально, минимально необходимыми. Поскольку винеровская фильтрация в условиях априорной неопределенности сводится [97] к малоотличающимся по эффективности субоптимальным фильтрам, следует остановиться на фильтре с прямоугольным спектральным окном. В выражениях для оценок фазы он представлен операторами F_{ab}^+ , F_{ab} . Ширина полосы такого фильтра будет несколько завышенной по отношению к ширине полосы $W(x)$, и фильтр получится неискажающим, так как объектное поле $W(x)$ и фактор $\mu(x)$ моделируются ЦФЭТ.

Второе требование будет обеспечено последовательностью применяемых процедур шумоподавления. Первой идет медианная фильтрация, так как импульсный шум плохо подавляется линейными фильтрами [12], создает сильные помехи при определении числа интерференционных полос и ширины спектра объектного поля. К тому же медианный фильтр не создает краевых эффектов, так как спектральная полоса импульсного шума значительно шире всех других составляющих интерферограммы. Затем должно следовать удаление аддитивного полиномиального фона, прежде всего его линейной составляющей. Эта операция создает благоприятные условия для последующего продолжения интерферограммы за пределы области определения, так как уменьшает ширину спектра Фурье этой функции.

Для продолжения интерферограммы будем использовать итерационный алгоритм (2.67), прежде всего потому, что он содержит

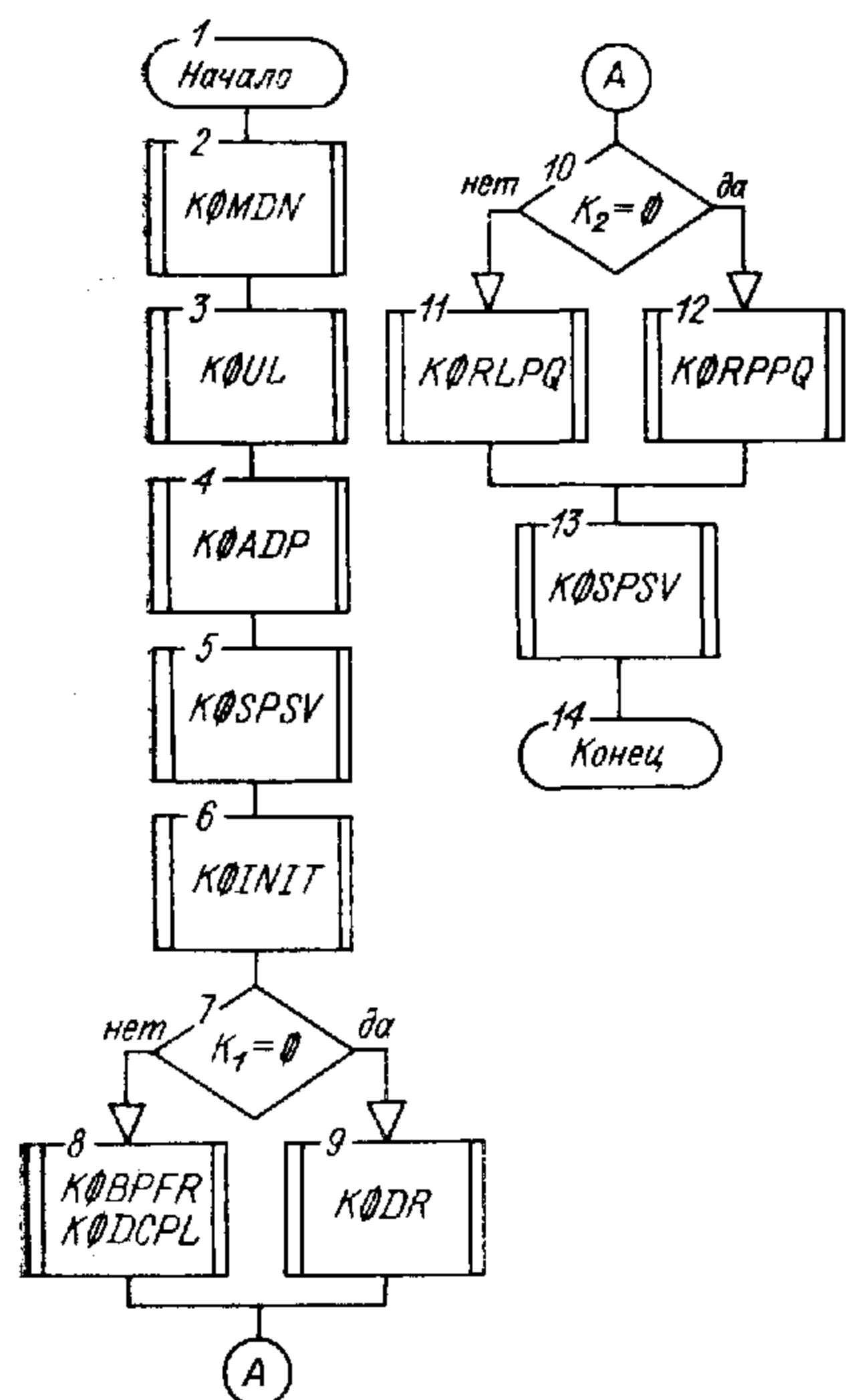


Рис. 2.9. Структурная схема алгоритма «Скан».

ограничения на положительность функции. Кроме того, он реализуется с помощью алгоритма БПФ, который применяется и в других процедурах. Это создает единообразие структуры программных средств.

Далее применяются выражения для оценок объектной фазы по методу прямой демодуляции или дисперсионных соотношений, которые содержат линейные фильтры с прямоугольным спектральным окном.

Рассмотренная последовательность основных действий должна быть дополнена служебными процедурами, преобразующими длину массивов данных. Это вызвано тем, что алгоритм БПФ работает с массивами, длина которых 2^m , $m \in \mathbb{Z}$, а входные массивы могут быть произвольной длины из-за того, например, что интерферограмма имеет круглую форму.

Алгоритм «Скан» (рис. 2.9) работает с массивом интерферограммы $G(j)$, $j \in [1, N_p]$, размещенным в ОЗУ ЭВМ. Кроме массива, априорно задаются: l_m — длина медианного фильтра; p_w — коэффициент формы спектра объектного поля; k_1, k_2 — ключи выбора режима работы; 2^m — рабочая длина массивов.

Функционирует алгоритм «Скан» следующим образом. После медианного и полиномиального фильтров, последовательно реали-

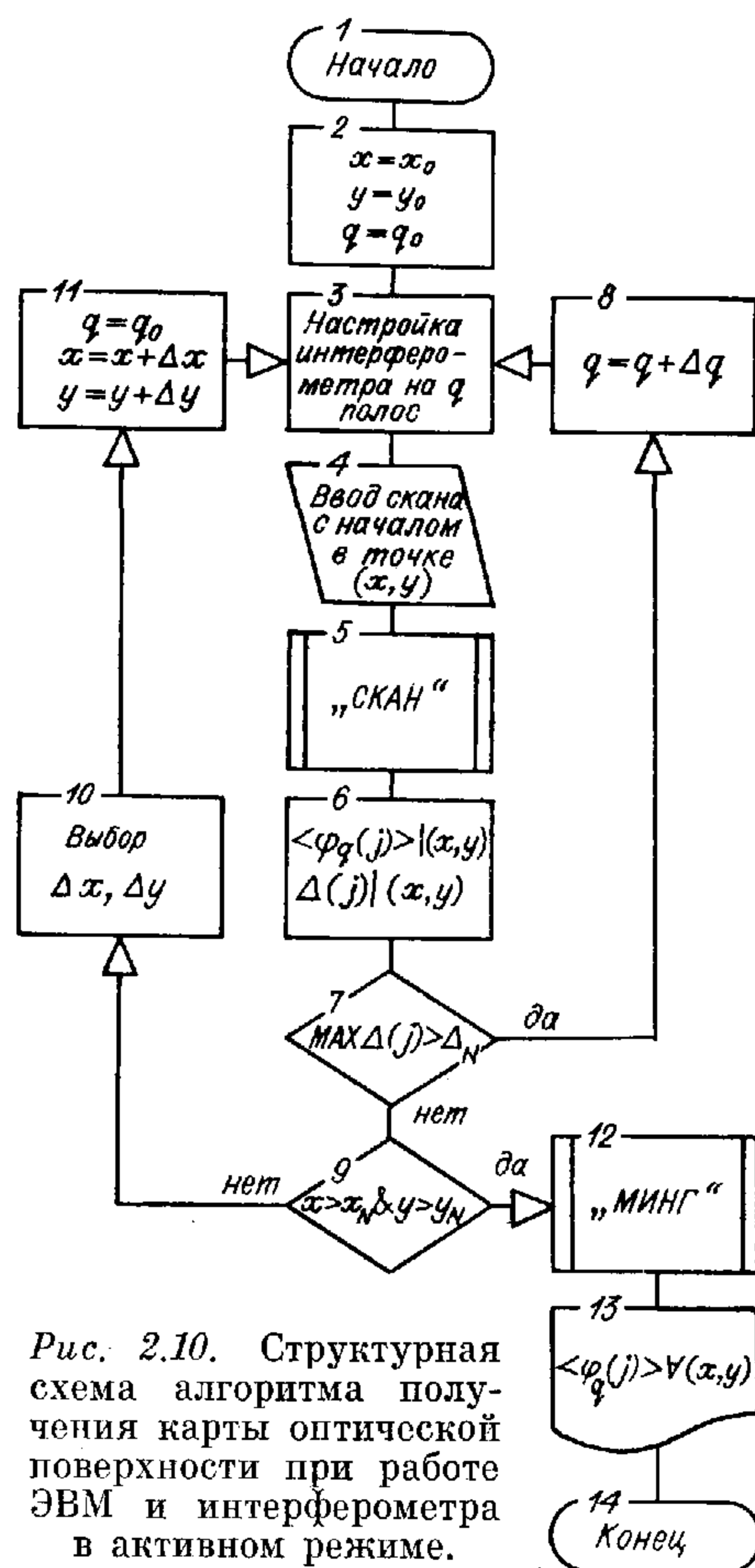


Рис. 2.10. Структурная схема алгоритма получения карты оптической поверхности при работе ЭВМ и интерферометра в активном режиме.

зуемых программами KOMDN и KOUL, происходит определение периода продолжения $T \geq N_p$, числа интерференционных полос q и полуширины спектра объектного поля Δk_w с помощью программы KOADP. Затем преобразуется длина массива программой KOSPSV так, что $T \Rightarrow 2^m$, а $N_p \Rightarrow N_c$. После этого массив $G(j)$ продолжается на интервал $[N_x + 1, 2^m]$ программой KOINIT. По полученному массиву интерферограммы восстанавливается объектная фаза. Если $k_1 = 0$, применяется метод дисперсионных соотношений, реализуемый программой KODR, иначе используется метод прямой демодуляции, последовательно осуществляемый программами KOBPFR и KODCPL. Далее оценка фазы в виде массива $F(j)$, $j \in [1, 2^m]$ подвергается полиномиальной фильтрации. Если $k_2 = 0$, удаляется квадратичная составляющая по программе KORPPQ, иначе линейная составляющая программой KORLPQ. На заключительном этапе преобразуется длина массива $F(j)$ к первоначальной — $N_x \Rightarrow N_p$.

По методу дисперсионных соотношений интерферограмма демодулируется с помощью программы KODR, включающей линейный фильтр KOBPFR. Последняя программа используется и при прямой демодуляции интерферограммы. Содержащийся в выражениях (2.33), (2.34) оператор преобразования Гильберта относится к классу операторов свертки, поэтому он совмещен в программе KOBPFR с оператором полосовой фильтрации, где для их реализации используется алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Поскольку преобразуемая функция является периодической, то Гильберт-трансформанта вычисляется без каких-либо методических погрешностей, соответствуя определению преобразования Гильберта для дискретной периодической последовательности [27, 55]. Эта специфика рассматриваемой задачи связана с применением оптимального продолжения. Другие известные алгоритмы и программные реализации, осуществляющие преобразование Гильберта, основаны на прямом вычислении свертки [23, 25, 33, 67, 83]. Описано также применение для этой цели метода Симпсона [56]. Но БПФ обеспечивает более высокое быстродействие [79] и методическую точность.

Отметим особенности вычисления фазы с помощью функции Фортрана ATAN2 по программе KOPHR \subset KODCPL \subset KODR. Эта функция дает значения фазы в интервале $[-\pi, \pi]$. Линейная составляющая фазы значительно превышает этот диапазон, поэтому полученная после ATAN2 фаза представляет собой пилообразную функцию. Устранение разрывов требует априорной информации о быстроте роста функции фазы. В программе KOPHR в соответствии с алгоритмом, описанным в [107], предполагается, что между двумя соседними отсчетами фаза возрастает меньше, чем на $\pi/2$. При невыполнении этого условия отдельные куски функции фазы сшиваются путем добавления константы, равной π .

При реализации дисперсионных соотношений необходимо вычислить логарифм интерферограммы. Эта функция более широкополосна, нежели сама интерферограмма, и числа отсчетов, обеспечивающих взаимно однозначное представление интерферограммы, может быть недостаточно для представления ее логарифма. Это

проявится при применении БПФ в области частот. Участки спектра логарифма интерферограммы из области высоких частот, в силу периодичности спектра, попадут в область низких частот. Для предотвращения такого наложения в программе KODR применена БПФ-интерполяция [7, 25], при которой увеличивается в 2^m раз число отсчетов в интерферограмме. После вычисления логарифма и его линейной фильтрации первоначальное число отсчетов восстанавливается тем же способом. Для этой цели применяется программа КОСМЕХ \subset KODR.

Алгоритм «Скан» со всеми рассмотренными особенностями был реализован в системе математического обеспечения Интеркон-02-Скан-1984 [59].

По алгоритму (рис. 2.10) ЭВМ и интерферометр работают в активном режиме. Управляемым элементом в интерферометре может быть, например, зеркало опорного канала (эталон), снабженное пьезоэлектрическим приводом, который через соответствующий интерфейс подключен к ЭВМ (см. рис. 2.1). По сигналу ЭВМ зеркало изменяет угол наклона относительно оптической оси опорного канала интерферометра. При этом не требуется оцифровки положения зеркала. Достаточно, если будет разрешено 10—50 угловых положений и соответствующее им число полос q . Это создает преимущества по сравнению с известными методами, основанными на кусочно-постоянном изменении опорной фазы, где требуется прецизионный контроль фазовых сдвигов (разд. 2.1). Для $\lambda = 0,6328$ мкм изменению угла наклона эталонного зеркала от $13''$ до $11'$ соответствует изменение частоты интерференционных полос от 1 до 50 см^{-1} . В этом диапазоне изменение частоты полос на 1 см^{-1} соответствует приращению угла приблизительно на $13''$.

Рассмотрим работу алгоритма по рис. 2.10.

1. Начало работы.

2. Производится установка координат начала (x, y) первого фотометрического сечения интерферограммы (скана) и начального числа интерференционных полос q_0 .

3. По сигналу ЭВМ производится поворот зеркала опорного канала относительно оптической оси интерферометра на угол, соответствующий q -интерференционным полосам.

4. Устройство ввода сканирует, оцифровывает и вводит в ОЗУ фотометрическое сечение интерферограммы с началом в точке (x, y) .

5. Работает алгоритм «Скан» (см. рис. 2.9).

6. Накапливаются суммы $\sum_{q=q_0}^{q_N} \varphi_q(j)$ и $\sum_{q=q_0}^{q_N} \varphi_q^2(j)$ для скана с началом в точке (x, y) , параметр суммирования есть число интерференционных полос. Полученные суммы используются для оценки (2.46), для вычисления стандартного отклонения и доверительного интервала $\Delta(j)$ при $q_N - q_0$ выборках.

7. Проверяется, больше или нет максимальное значение доверительного интервала, чем заданная величина Δ_N . Если $\max \Delta(j) > \Delta_N$, усреднение продолжается и происходит переход к п. 8, иначе — к п. 9.

8. Число интерференционных полос изменяется на заданную величину Δq .

9. Происходит проверка, все ли заданные сканы проанализированы; если все, то переход к п. 12, иначе — к п. 10.

10. Подготовка к началу анализа нового фотометрического сечения интерферограммы, определяется шаг по координатам.

11. Устанавливается начальное число интерференционных полос q_0 , координаты начала нового скана.

12. Работает алгоритм построения двумерной решетчатой функции по отдельным сечениям («Минг»). Результатом является оценка фазы $\langle \varphi_q(j) \rangle$ для всех сканов с началом в точках (x, y) .

13. Происходит визуализация полученной оценки $\langle \varphi_q(j) \rangle$ для всех точек (x, y) .

Рассмотрим алгоритм построения карты двумерной фазы. Построение может состоять из трех этапов. Вначале необходимо увязать фазы, восстановленные из отдельных пересекающихся сканов интерферограммы в двумерную решетчатую функцию, т. е. минимизировать невязки в точках пересечения сканов. Затем необходимо интерполировать значения фазы, заданные на решетке, на промежуточные точки. После этого производится визуализация двумерной фазовой функции в виде аксонометрической проекции и в виде линий уровня — топографической карты.

Из названных трех этапов остановимся только на первом, так как хорошо известны различные методы двумерной интерполяции — на основе БПФ, сплайнов, ортогональных полиномов [8, 25, 46]. Кроме того, можно обойтись без интерполяции, как в системе Интеркон-85-М [31], поскольку $32 \div 64$ равномерных сечений функции фазы достаточно для хорошего восприятия графического образа и для позиционирования инструмента на станке. Что касается графического представления двумерной информации, то эта область также достаточно разработана, а вид представления определяется прежде всего возможностями технических средств.

Продольные и поперечные сканы должны удовлетворять условию выбора. Для полосчатой интерферограммы это осуществить нетрудно путем определения подходящего угла между направлением сканирования и интерференционными полосами. Здесь возможны два варианта. Один из них, рассмотренный в [31], предусматривает независимое сканирование интерферограммы в продольном и поперечном направлениях, что согласуется с техническими возможностями установки Quantimet-900, используемой с этой целью. При этом сканов одного из направлений может быть значительно меньше, нежели другого, так как два направления сканирования необходимы лишь для минимизации невязок, а графическое представление может обеспечить набор сканов одного направления.

Другой вариант предполагает реализацию плотного декартова растра, размещение его в ОЗУ (может быть, частичное) с тем, чтобы выделить в нем сканы необходимого направления.

Перейдем к рассмотрению задачи построения решетчатой функции из отдельных сечений фазы (сканов). При этом надо отве-

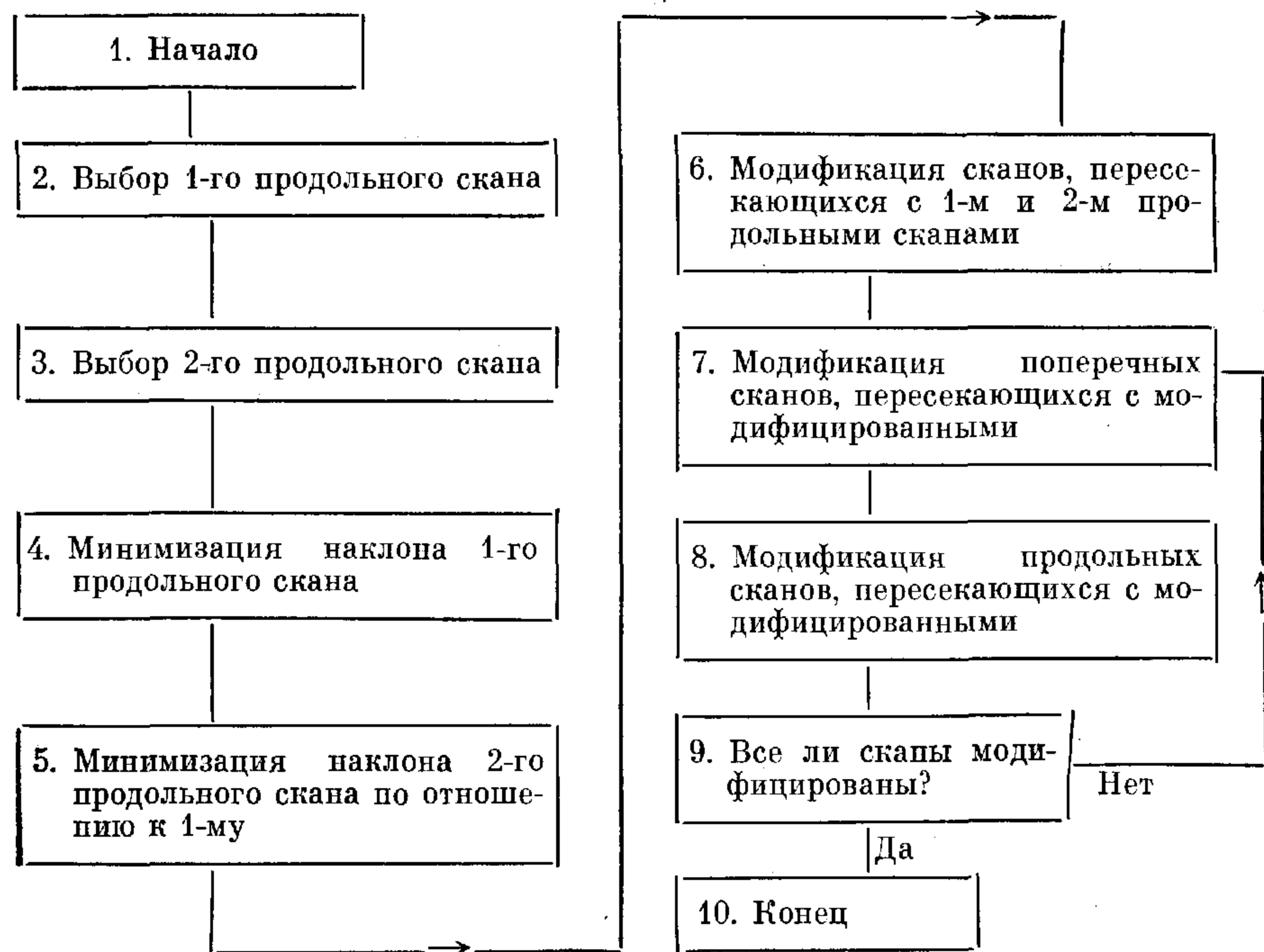


Рис. 2.11. Структурная схема алгоритма «Минг».

твить на вопрос о единственности такого представления в условиях действия шумов и указать алгоритм минимизации невязок в узлах решетки, образованной продольными и поперечными сканами.

Еще раз отметим, что восстанавливаемая из скана интерферограммы разность фаз $\Phi(x)$ отличается от объектной фазы $\varphi(x)$ линейной функцией $\beta x + \gamma$. Величина β однозначно связана с числом полос на длине скана и может быть вычислена по (2.52). По определению плоской опорной волны величины β , характеризующие наклон, для параллельных сканов интерферограммы должны быть одинаковыми. Однако при наличии шума это требование не удовлетворяется, так как каждый скан обрабатывается индивидуально, вне связи с соседними. Хотя относительная ошибка в определении величины наклона при этом может быть и незначительной, но так как β больше, чем $\max |\varphi'(x)|$, то целесообразно считать наклоны неопределенными с тем, чтобы минимизировать их различия на отдельных сканах.

Произвольная постоянная γ появляется в выражениях (2.33), (2.34). Она так же, как и β , обеспечивает степени свободы, необходимые для минимизации невязок в точках пересечения продольных и поперечных сканов.

Алгоритм «Минг» осуществляет последовательную минимизацию невязок (рис. 2.11). Алгоритм содержит две основные операции: минимизацию и модификацию.

При минимизации устраняют методом наименьших квадратов линейную составляющую в массиве скана фазы $\varphi(j)$. Для этого используется алгоритм (2.57), реализуемый программой KORLPQ.

При модификации также применяют метод наименьших квадратов и минимизируют невязки в точках пересечения k -го скана с набором j -х сканов. В данном случае это требует обоснования. Рассмотрим функционал, описывающий невязки:

$$\mathcal{L}_k = \sum_{j=1}^k [\varphi_k(j) + l_k(j) + v_k(j) - \varphi_j(k) - v_j(k)]^2,$$

но $\varphi_k(j) = \varphi_j(k)$ и задача сводится к оптимальной оценке линейной функции $l_k(j)$ на фоне аддитивного шума $\tilde{v}(j) = v_k(j) - v_j(k)$:

$$\mathcal{L}_k = \sum_{j=1}^N [l_k(j) - \tilde{v}_k(j)]^2 = \min.$$

В предположении нормальности $\tilde{v}_k(j)$ минимум функционала \mathcal{L}_k будет соответствовать максимуму плотности вероятности случайной величины $l_k(j) - \tilde{v}_k(j)$ и оценка параметров линейной функции $l_k(j)$ будет максимально правдоподобной.

Обсудим вопрос о единственности полученного решения. Из последовательности действий по алгоритму «Минг» следует, что результат обусловлен выбором первого и второго сканов. Дальнейшая последовательность выбора k -х сканов для минимизации невязок будет этим уже определена. Таким образом, решение не единственно, но экстремально.

Решение остается экстремальным и при непрерывном изменении параметров β и γ первого скана. Поэтому, если решать обсуждаемую задачу не последовательно по алгоритму «Минг», а обычным путем — минимизацией суммы квадратов невязок сразу по всем точкам пересечения сканов, то определитель полученной при этом системы линейных уравнений должен обращаться в нуль. Этот факт наблюдался в численном эксперименте.

Найти глобальный экстремум возможно путем перебора решений, полученных для различных первых пар сканов. Если же из соображений экономии машинного времени это делать нецелесообразно, то следует остановиться на оптимальном выборе первой пары. При этом есть надежда, что экстремальная невязка будет не самая большая.

Критерии оптимальности могут быть, например, такие: наибольшее число точек пересечения со сканами противоположного направления, минимальная величина шума в той области интерферограммы, где располагается первая пара сканов, наибольшее расстояние между выбранными сканами.

Стало быть, полученное решение по алгоритму «Минг» следует определить как оптимальное в среднеквадратическом смысле при условии фиксации первой пары сканов.

Рассмотренный алгоритм включен в систему математического обеспечения интерференционного контроля оптики Интеркон-85-М [31].

Таким образом, восстановление двумерной интерферограммы путем анализа ее одномерных сканов возможно и находит свое завершение в алгоритме «Минг».

2.4. ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОБЪЕКТНОЙ ФАЗЫ

В данном разделе предстоит применить синтезированные выше алгоритмы для анализа интерферограмм, модельных и зарегистрированных в натурном эксперименте.

Первые результаты использования дисперсионных соотношений для обработки данных интерференционного контроля оптики опубликованы в [21]. Эксперимент состоял в измерении фазового набега в диаметральном сечении плоскопараллельной пластинки. Для образования интерферограммы применялся интерферометр Тваймана — Грина, в качестве источника света — гелий-неоновый лазер, а детектором служил фотоэлектронный умножитель с точечной диафрагмой, установленной на столике с приводом. Интерференционная картина сканировалась и представлялась 8-битовыми отсчетами, которых было от 327 до 452 в разных реализациях. Данные обрабатывались на ЭВМ М-4030. Эксперимент проводился в присутствии шумов, спектр которых в интерферограмме перекрывал полосу от нулевой частоты до частоты, равной приблизительно $2/3$ частоты Найквиста. Отношение сигнал — шум по мощности составляло около 1,5.

Восстановленная фаза усреднялась по выборке из пяти элементов. Выборочные интерферограммы отличались числом полос. Стандартное отклонение восстановленной фазы не превышало 0,04 рад.

Усреднение оценок фазы, полученных из выборочных интерферограмм, исследовалось в численном эксперименте [87]. Установлено, что усреднение оценки фазы по выборке интерферограмм, искаженных независимыми реализациями мультипликативного шума, в 4—5 раз улучшает оценку. Это справедливо как для метода прямой демодуляции, так и для дисперсионных соотношений.

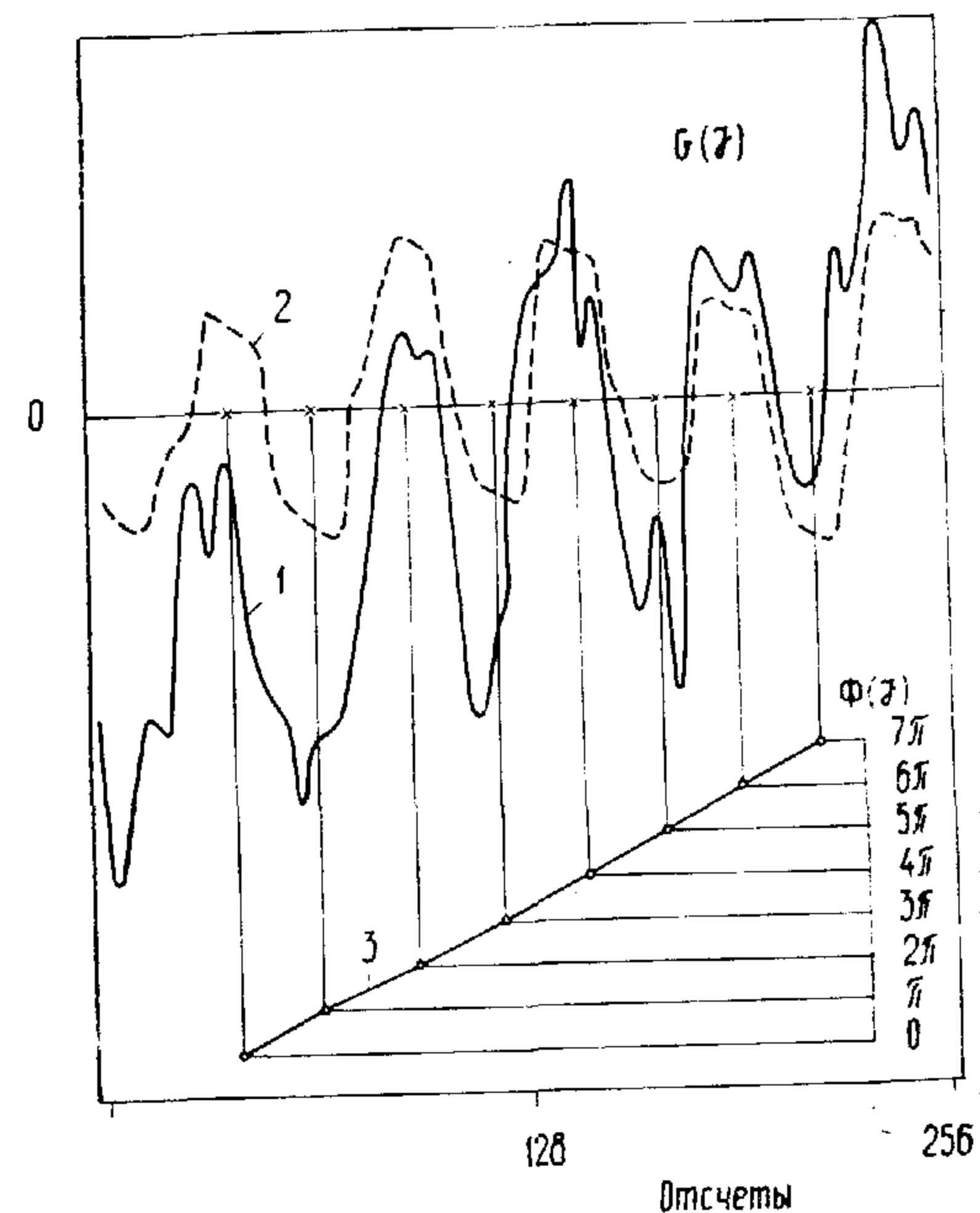
О способе получения необходимого для усреднения ансамбля интерферограмм путем изменения числа интерференционных полос сообщалось в [32].

Применение алгоритма, аналогичного прямой демодуляции, для восстановления фазы из экспериментальной интерферограммы впервые описано в [137]. Достигнутая точность без учета краевого эффекта была около 0,2 рад.

Упомянутые результаты очень трудно сравнивать с известными данными по восстановлению фазы из интерферограмм другими методами, в частности, наиболее распространенным методом хребтовых линий. Причина этого — недостаточное описание условий проведения экспериментов. Поэтому в качестве альтернативы дис-

Рис. 2.12. Метод интерполяции фазы.

× информационные точки — середины полуволн; 1 — исходная интерферограмма, 2 — интерферограмма после медианного и полиномиального фильтра, 3 — фаза, интерполированная между значениями, кратными λ .



персионным соотношениям и прямой демодуляции рассмотрим одномерный аналог традиционного метода хребтовых линий. Для определенности назовем его реализацию алгоритмом интерполяции фазы. Совместное исследование этих трех алгоритмов в одних и тех же условиях позволит объективно оценить их эффективность.

Алгоритм интерполяции фазы заключается в том, что скан интерферограммы подвергают действию медианного фильтра, длина которого составляет приблизительно треть ширины интерференционной полосы. Затем удаляется аддитивный фон и путем скелетонизации [75] определяются середины x_n получившихся при этом положительных и отрицательных полуволн. В найденных точках находится фаза $\Phi(x_n) = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots, 2q$, а q — число интерференционных полос. Затем функция $\Phi(x_n)$ интерполируется на все значения x кубическим сплайном [100] (рис. 2.12).

Не вызывает сомнения, что алгоритм интерполяции фазы абсолютно точен для интерферограммы, полученной при сложении плоских волн. Функция $W(x)$ в этом случае гармоническая, $\Phi(x)$ — линейная, а точки x_n — равноудаленные и являются отсчетами Найквиста для $W(x)$. По мере расширения спектра функции $W(x)$ за счет как полезной фазовой модуляции, так и шумовой качество алгоритма будет падать. Это следует также из того факта [60], что законы распределения интервалов между нулями случайного процесса $W(x)$ и его фазы совпадают тем больше, чем узкополоснее процесс, независимо от отношения сигнал — шум, при аддитивном по отношению к $W(x)$ шуму.

Все названные процедуры алгоритма интерполяции фазы будут располагаться в структурной схеме алгоритма «Скан» на месте блока, выполняющего операции метода дисперсионных соотношений или прямой демодуляции. Все остальные операции будут общими для всех трех алгоритмов. Следовательно, рассмотренный аналог традиционного метода совпадает со своим прототипом в главном, в том, что фаза интерполируется между известными значениями в максимумах и минимумах интерференционных полос.

Таким образом, задача исследования состоит в сравнении качества различных алгоритмов восстановления фазы из интерферограмм в условиях, при которых получены оптимальные оценки, вне этих условий, при более общих свойствах шумов интерферограммы, а также при обработке экспериментальных данных интерференционного контроля оптики.

Численное исследование качества оценок фазы. Выборочные интерферограммы генерировались в соответствии с математической моделью (2.42). Для этого применялся датчик псевдослучайных чисел, реализованный по методике, описанной в [47]. Датчик создавал независимые гауссовы последовательности чисел с заданными дисперсиями и спектрами мощности, из которых затем образовывались составляющие модели: $\varphi(j)$, $\mu(j)$, $\nu(j)$, $j \in [1, N]$.

Применяемый датчик использует алгоритм БПФ, поэтому генерируемые случайные последовательности N -периодичны. Для исключения влияния периодичности на результаты моделирования в имеющихся 256 отсчетах интерферограммы последние 77 отбрасывались, а первые 179 вновь интерполировались до $N = 256$.

Исследуемой величиной было качество алгоритмов восстановления фазы, которое определялось функционалом ε_φ как отношение норм в $L_2(N)$:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\|\varphi(j) - \widehat{\varphi}(j)\|}{\|\varphi(j)\|}, \quad (2.70)$$

где под $\widehat{\varphi}(j)$ понимаются полученные в результате восстановления оценки (2.43), (2.46).

В качестве оценки ε_φ было выбрано ее среднее арифметическое. Усреднение проводилось по двум ансамблям — шума и фазы $\varphi(j)$. Объем выборки был равен 30. Отдельные контрольные эксперименты с большим объемом (50) показали, что среднее и дисперсия функционала качества существенно не меняются. Это было расценено как наличие статистической устойчивости.

При данном объеме выборки в силу центральной предельной теоремы [41] среднее арифметическое $\langle \varepsilon_\varphi \rangle$ будет распределено по закону, близкому к нормальному. Кроме того, при проведении статистического эксперимента представляют интерес случаи с малым $\sigma_{\varepsilon_\varphi}$, что означает устойчивость алгоритма оценивания фазы к входным данным, вследствие этого среднее арифметическое как оценка ε_φ будет близко к оценке максимального правдоподобия.

Качество алгоритмов оценок фазы исследовали в условиях, когда шумовые компоненты математической модели интерферограммы вводились индивидуально, что дало возможность установить особенности их влияния на оценку. Величина шума в интерферограмме характеризовалась также функционалом (2.70) с заменой $\varphi(j)$ на значения идеальной интерферограммы, а $\widehat{\varphi}(j)$ — на значения зашумленной интерферограммы при заданной величине шума $\mu(j)$, $\nu(j)$ или других шумовых компонент. При этом определялись статистики $\langle \varepsilon_\nu \rangle$, σ_{ε_ν} , $\langle \varepsilon_\mu \rangle$, σ_{ε_μ} . Отдельные выборочные интерферограммы приведены на рис. 2.13. Использовалось усреднение групп фазо-

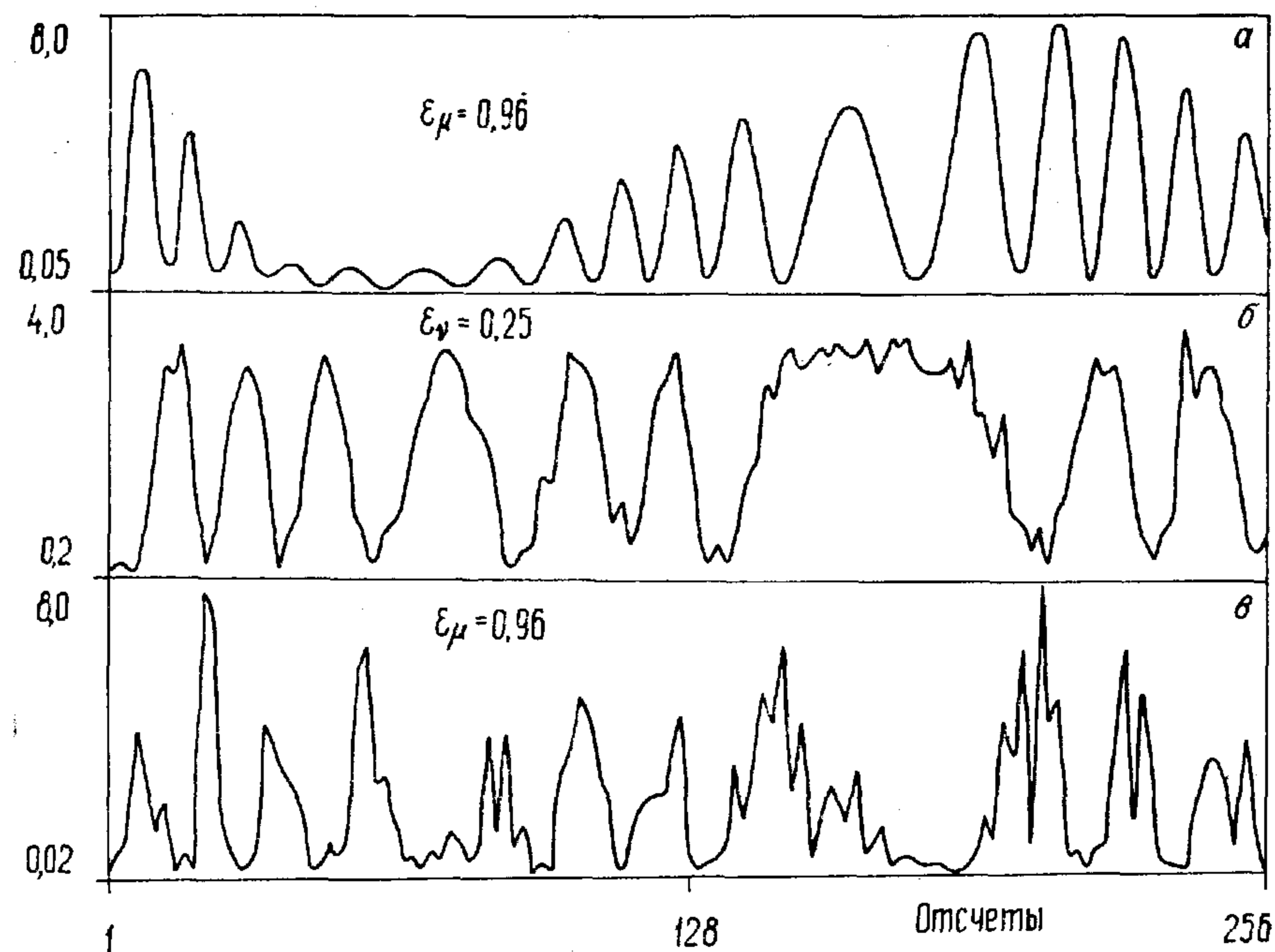


Рис. 2.13. Выборочные интерферограммы при разных видах шума, $\sigma_\rho = \pi$. а — низкочастотный мультипликативный шум, б — белый аддитивный шум, в — белый мультипликативный шум.

вых реализаций, восстановленных из выборочных интерферограмм с разным числом полос. Объемы групп усреднения были равны квадратам чисел натурального ряда — 1, 4, 9, 16, 25. Число интерференционных полос q изменялось внутри группы с шагом единица. Начальное число полос выбиралось равным 5, 7 и 10.

Ниже представлены показатели качества оценок фазы в отсутствие $\mu(j)$ и $\nu(j)$. Искажающим фактором была только конечность интервала определения интерферограммы. Полуширина спектра частот объектной фазы составляла 3% от частоты Найквиста $NN = N/2 + 1$, а среднее квадратическое уклонение равнялось $0,4\pi$, что эквивалентно пятой части длины волны света. Начальное число интерференционных полос было около пяти. Интерполяция фазы дает в 2—3 раза худший результат, чем альтернативные алгоритмы. Усреднение оценки фазы по выборке интерферограмм с разным числом полос приводит к положительному эффекту, и алгоритмы на основе всех трех методов дают при этом высокую точность.

Объем группы усреднения	Прямая демодуляция	Дисперсионные соотношения	Интерполяция фазы
1	0,04 (0,01)*	0,07 (0,03)	0,1 (0,03)
4	0,02 (0,006)	0,03 (0,008)	0,05 (0,01)
9	0,02 (0,005)	0,02 (0,006)	0,03 (0,009)
16	0,01 (0,004)	0,02 (0,004)	0,03 (0,004)
25	0,01 (0,003)	0,01 (0,003)	0,03 (0,004)

* Первое число — $\langle \varepsilon_\varphi \rangle$, в скобках — $\sigma_{\varepsilon_\varphi}$.

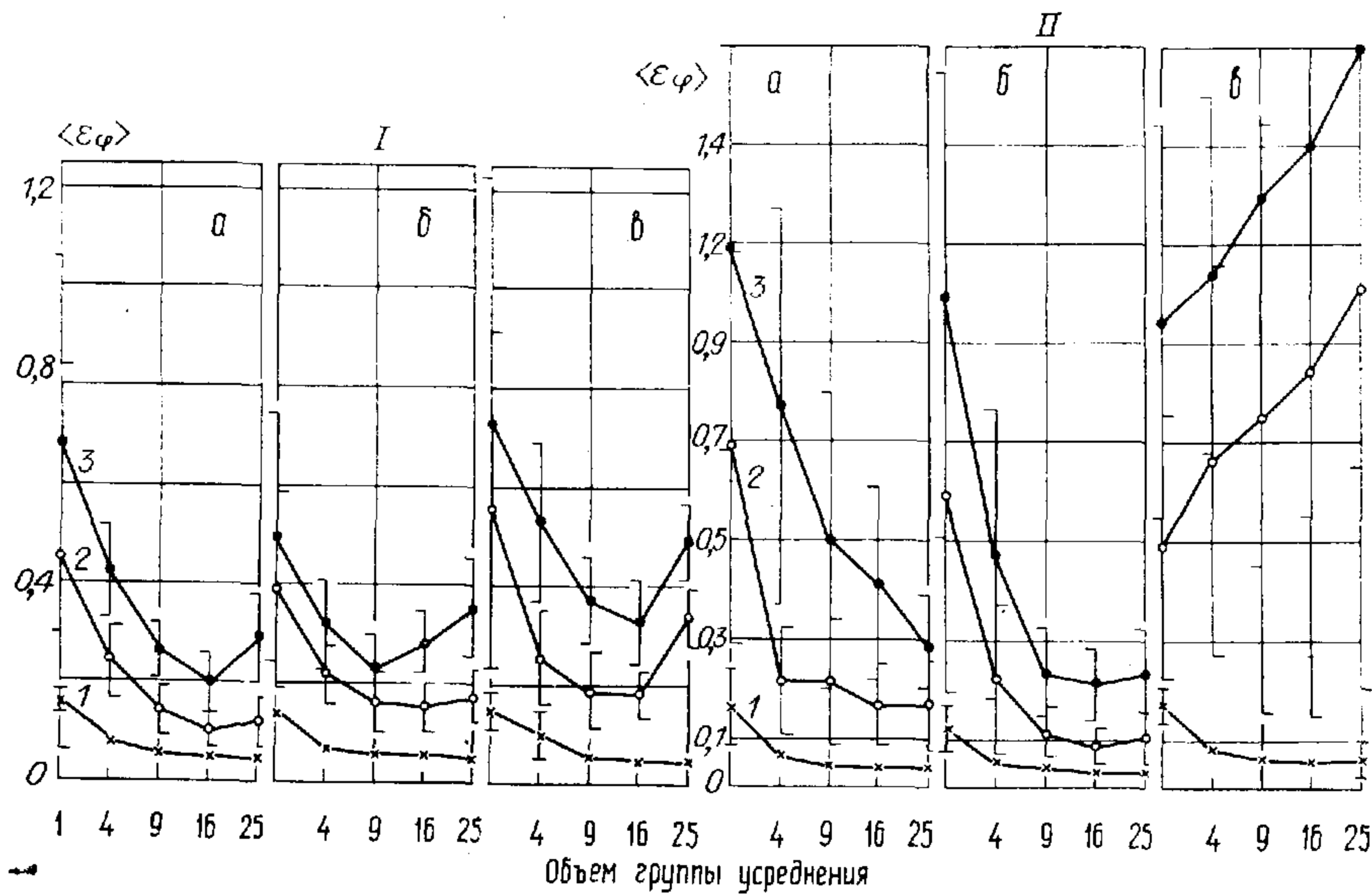


Рис. 2.14. Качество оценок фазы при мультипликативном шуме, $\sigma_\varphi = 0,4\pi$.

a — метод прямой демодуляции, *б* — метод дисперсионных соотношений, *в* — метод интерполяции фазы; I: 1 — $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 0,42$, $\sigma_{\varepsilon\mu} = 0,02$; 2 — $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 0,92$, $\sigma_{\varepsilon\mu} = 0,05$; 3 — $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 1,55$, $\sigma_{\varepsilon\mu} = 0,07$; II: 1 — $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 0,42$, $\sigma_{\varepsilon\mu} = 0,03$; 2 — $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 0,95$, $\sigma_{\varepsilon\mu} = 0,07$; 3 — $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 1,6$, $\sigma_{\varepsilon\mu} = 0,15$.

В условиях мультипликативного зашумления интерферограммы при сохранении остальных параметров эксперимента получены результаты, представленные на рис. 2.14. В первом случае шум $\mu(j)$ был белым, во втором — низкочастотным с полушириной полосы в 3 % от частоты Найквиста. Величину шума в интерферограмме характеризуют параметры $\langle \varepsilon_\mu \rangle$ и $\sigma_{\varepsilon\mu}$.

Анализ этой серии экспериментов показывает, что усреднение существенно повышает точность оценки фазы и ее устойчивости, за исключением случая (рис. 2.14, II, в), когда метод интерполяции фазы применяется в присутствии значительного низкочастотного мультипликативного шума. Это связано с неправильным определением в таких условиях экстремальных точек интерференционных полос. В части случаев рост точности оценок приблизительно пропорционален квадратному корню из объема группы усреднений при условии малости величины B_{pq} (2.50). При увеличении мультипликативного шума расширяется спектральная полоса произведения $W(j) [1 + \mu(j)]$, одновременно в нее попадает больше аддитивного шума, обусловленного наличием в интерферограмме членов, представляющих интенсивности объектной и опорной волн, B_{pq} при этом также возрастает. Все это приводит к уменьшению эффекта от усреднения. Особенно это характерно для белого мультипликативного шума. Из рис. 2.14, I видно, что имеется оптимальный объем

группы усреднения (9—16). При малом шуме такое количество усреднений уже обеспечивает высокую точность оценки фазы $\langle \varepsilon_\varphi \rangle = 0,15$, при большом — дальнейшее усреднение ухудшает результат. Когда действует низкочастотный мультипликативный шум (см. рис. 2.14, II), экстремум при изменении объема группы усреднения слабо выражен, так как в полосу частот объектного поля попадает все меньшее количество шума с ростом числа интерференционных полос.

Алгоритм, реализующий дисперсионные соотношения, дает при низкочастотном мультипликативном шуме приблизительно в 2 раза более точный результат, чем прямая демодуляция. Этот эффект вызван наложением в области частот спектров составляющих интерферограммы. Наложение уменьшается при гомоморфной фильтрации мультипликативного шума, которая реализуется алгоритмом дисперсионных соотношений. Эффективность этой фильтрации падает при расширении полосы мультипликативного шума (рис. 2.15). Наложение спектров обусловлено переменной амплитудой объектного поля

Результаты исследований влияния аддитивного шума на качество оценок объектной фазы представлены на рис. 2.16. Шум белый, начальное число интерференционных полос равняется десяти. Сравнительный анализ рис. 2.14—2.16 показывает, что вид шума (аддитивный, мультипликативный, белый, полосовой) в целом слабо влияет на качество оценки фазы, если $\langle \varepsilon_\nu \rangle = 0,4$, а $\langle \varepsilon_\mu \rangle = 0,4$. Эти значения шума нельзя считать малыми в том смысле, при котором была получена дисперсия оценки (2.50), тем не менее эффект от реализации оценки (2.46) значителен.

Аддитивный шум при существенно больших уровнях ($\langle \varepsilon_\nu \rangle \sim 1$) оказывает более сильное влияние на качество оценки, нежели мультипликативный при тех же $\langle \varepsilon_\mu \rangle$. Особенно это проявляется при большом числе полос. Поэтому увеличение объема группы усреднения больше четырех (см. рис. 2.16) нецелесообразно. Однако если отменить автоматическую настройку фильтров объектного поля и задать число интерференционных полос q и полуширину спектра Δk_w , основываясь на априорной информации, то результат значительно (в 7 раз) улучшается (см. рис. 2.16). Усреднение по выборке интерферограмм с разным числом полос становится при этом эффективным для группы из 25 интерферограмм.

Проведена серия экспериментов по восстановлению объектной фазы из кольцевых интерферограмм. Анализ кольцевой интерферограммы отличается от анализа полосчатой применением выражения (2.35), которое превращает монотонную фазовую функцию в функцию, имеющую максимум или минимум в заданной точке, а также тем, что вместо устранения линейной составляющей фазы устраняется параболическая в соответствии с (2.60). Кроме того, результаты (2.46), (2.50) для кольцевых интерферограмм непосредственно не применимы, так как вместе с ростом числа колец растет и ширина спектра пространственных частот объектного поля. Причем начало координат лежит внутри интервала определения

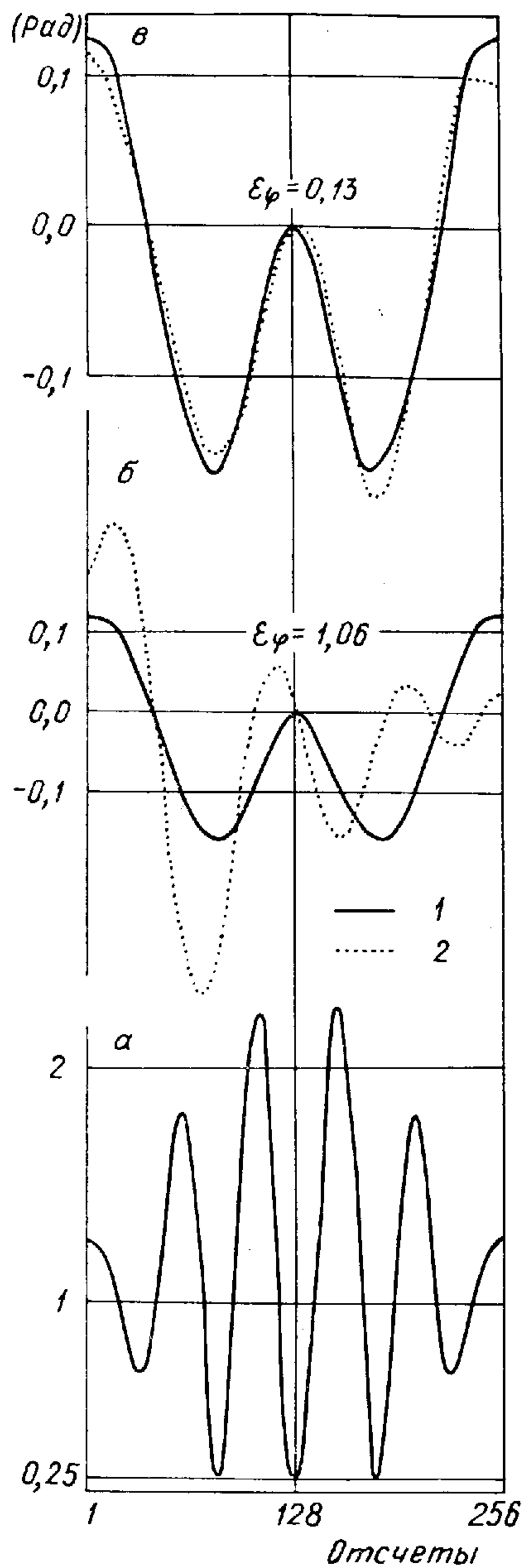


Рис. 2.15. Оценивание амплитуды и фазы объектного поля при низкочастотном мультипликативном шуме в интерферограмме.

a — восстанавливаемая интерферограмма, *б* — оценка фазы прямой демодуляцией, *в* — оценка фазы методом дисперсионных соотношений, *г* — оценка амплитуды методом дисперсионных соотношений, *д* — оценка амплитуды методом прямой демодуляции; 1 — эталон, 2 — оценка.

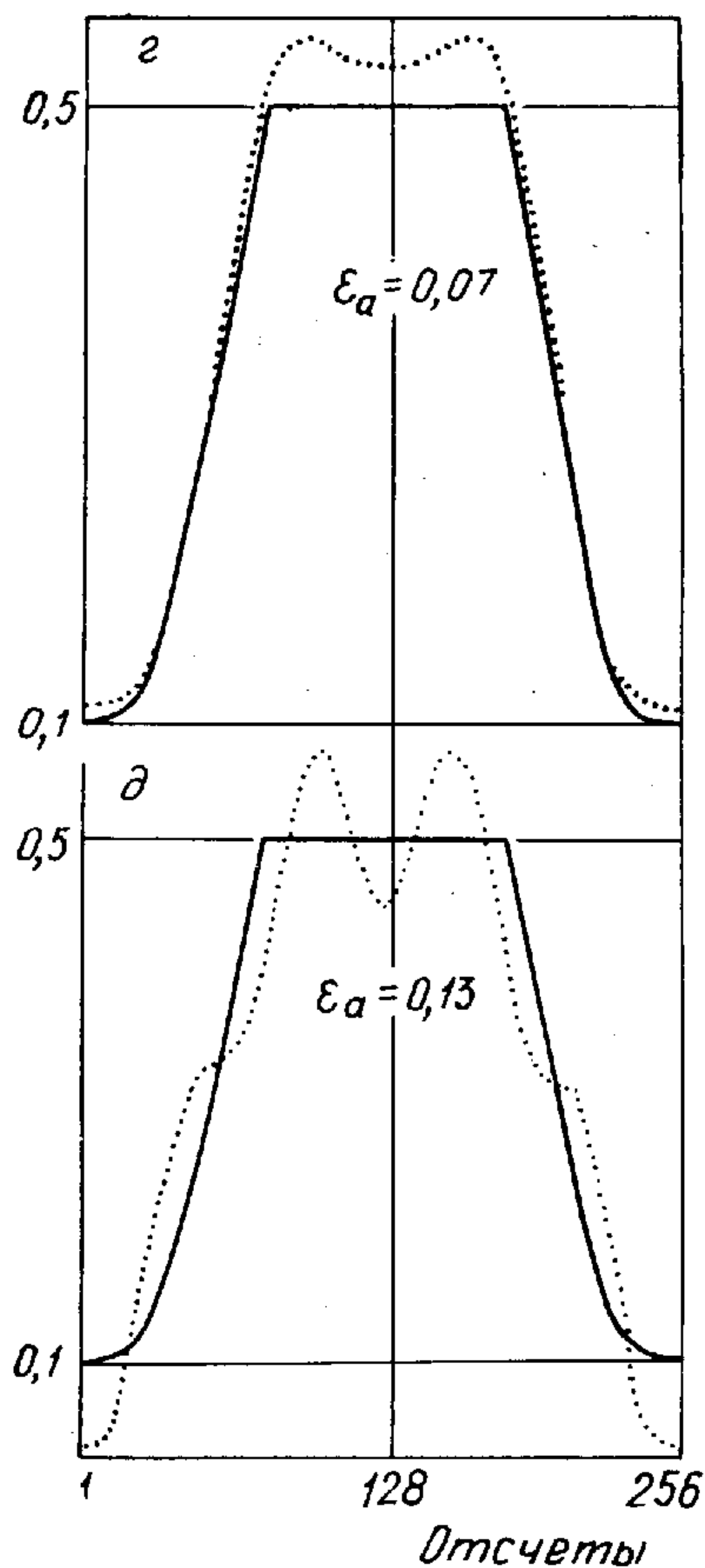


Рис. 2.16. Качество оценок фазы при аддитивном белом шуме, $\sigma_\varphi = 0,4\lambda$. *a* — метод прямой демодуляции, *б* — метод дисперсионных соотношений, *в* — метод интерполяции фазы; I: 1 — $\langle \epsilon_\varphi \rangle = 0,25$, $\sigma_{\epsilon_\varphi} = 0,08$; 2 — $\langle \epsilon_\varphi \rangle = 0,46$, $\sigma_{\epsilon_\varphi} = 0,01$; II ($\langle \epsilon_\varphi \rangle = 0,98$, $\sigma_{\epsilon_\varphi} = 0,03$): 1 — присутствует априорная информация о ширине спектра объектного поля и числе интерференционных полос, 2 — отсутствует априорная информация.

Число экспериментов, обеспечивающих оценку, как и в предыдущих исследованиях данного раздела, равнялось тридцати. Результаты (табл. 2.1) демонстрируют влияние медианной фильтрации на качество оценки фазы в присутствии белого мультипликативного шума. Число полуколец отличалось от целого на 0,5 за счет неполного внешнего кольца, число отсчетов на скане интерферограммы составляло 128, а $\sigma_\varphi = 0,4\lambda$.

Видно, что при малом числе полуколец (3—10) увеличение длины медианного фильтра приводит к положительному результату. Если же число полуколец увеличивать, то при той же длине фильтра оценка становится хуже той, которая получена в отсутствие медианного фильтра. Это указывает на необходимость согла-

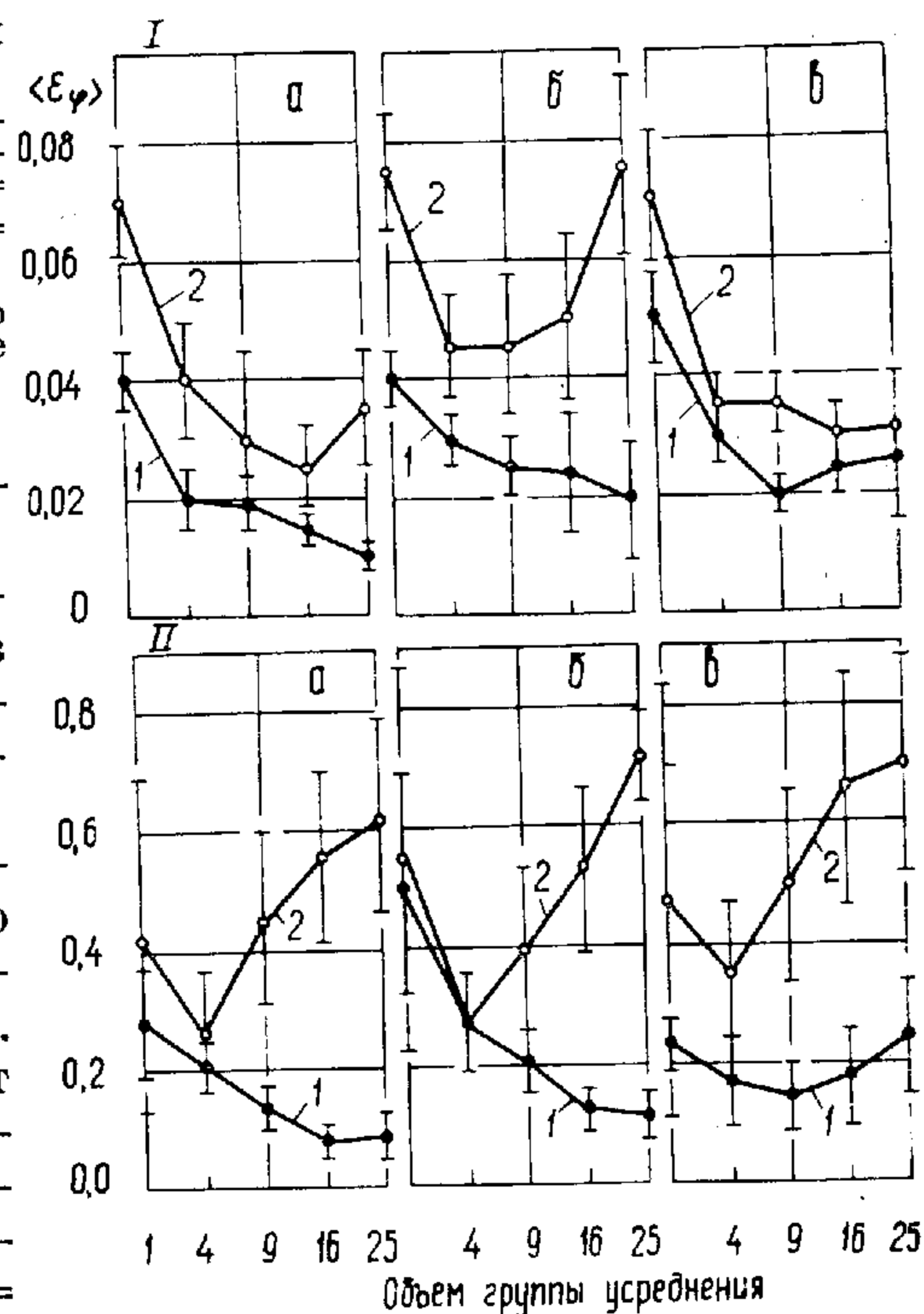


Таблица 2.1

Восстановление кольцевой интерферограммы

Алгоритм	$\langle \epsilon_\mu \rangle$	σ_{ϵ_μ}	l_m^*	q_r				
				3,5	7,5	11,5	15,5	19,5
Прямая демодуляция	0	0	1	16(3)**	11(1)	10(1)	9(0,5)	8(0,6)
	0,42	0,02	5	18(4)	16(2)	20(3)	22(4)	72(38)
			1	33(16)	18(3)	22(5)	23(3)	29(8)
Дисперсионные соотношения	0	0	1	16(4)	11(1)	9(1)	8(1)	8(0,5)
	0,42	0,02	5	16(4)	15(3)	19(4)	21(4)	63(33)
			1	25(15)	15(2)	19(5)	22(2)	51(20)
Интерполяция фазы	0	0	1	19(3)	15(2)	19(3)	25(2)	117(24)
	0,42	0,02	5	20(4)	14(1)	22(3)	42(14)	145(27)
			1	23(11)	17(2)	23(2)	38(11)	132(24)

* l_m — длина медианного фильтра в отсчетах.

** Первое число — $\langle \epsilon_\varphi \rangle \cdot 100$, в скобках — $\sigma_{\epsilon_\varphi} \cdot 100$.

спектра, и увеличение числа колец не приводит к появлению новой, независимой реализации шума в полосе частот объектного поля, что возможно для полосчатой интерферограммы. По этой причине оценка (2.46) для восстановления кольцевой интерферограммы не применялась.

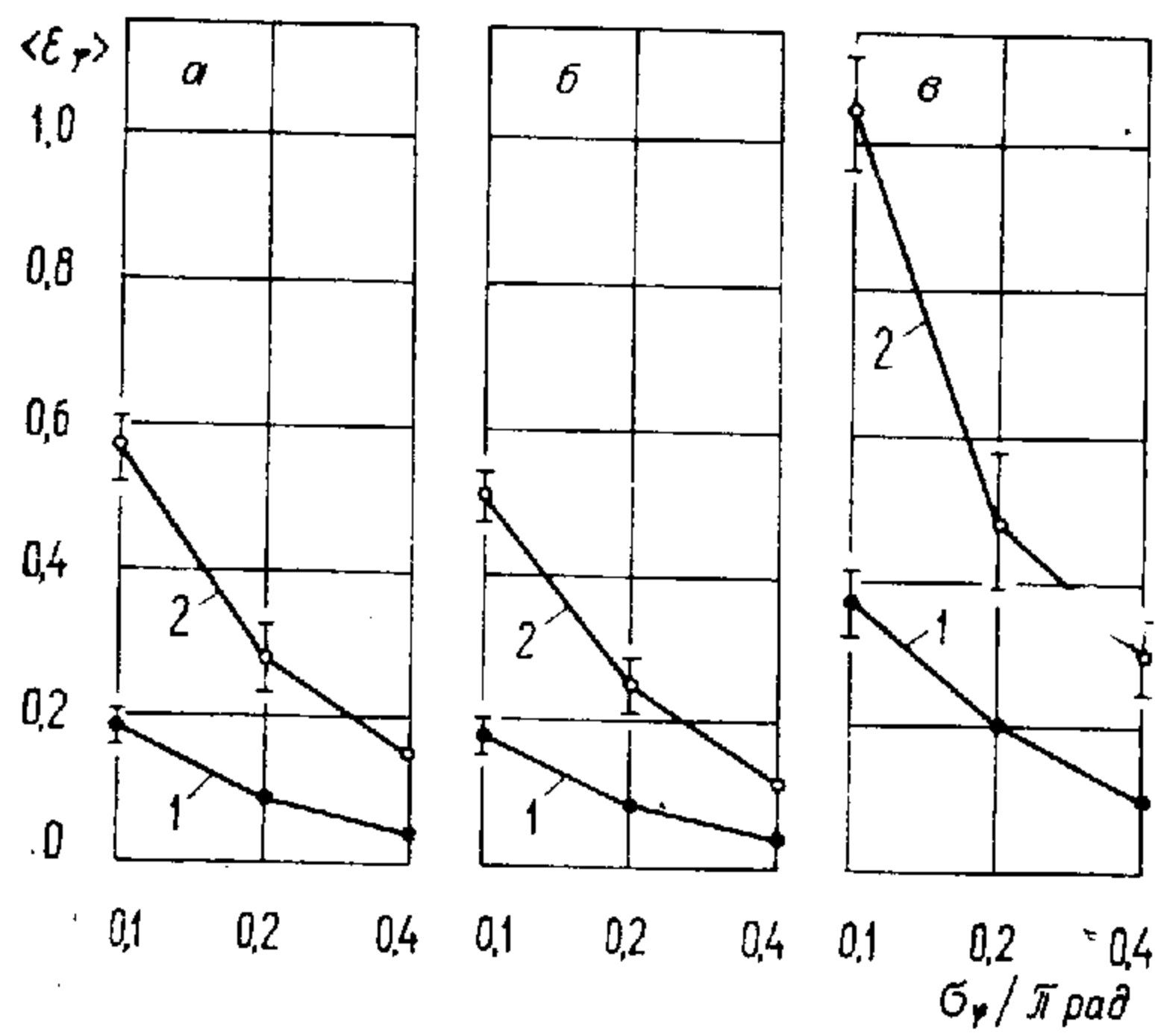


Рис. 2.17. Качество оценок фазы при мультипликативном белом шуме, $\langle \epsilon_{\mu} \rangle = 0,2$, $\sigma_{\epsilon_{\mu}} = 0,02$.

a — метод прямой демодуляции, *b* — метод дисперсионных соотношений, *c* — метод интерполяции фазы; 1 — полосчатая интерферограмма, 16 полос; 2 — кольцевая интерферограмма, 8 колец.

сования длины медианного фильтра с числом интерференционных колец либо полос.

Из табл. 2.1 следует также, что увеличение числа интерференционных колец от 3,5 до 19,5 улучшает каче-

ство оценки, получаемой по алгоритму прямой демодуляции и дисперсионных соотношений, а алгоритм интерполяции фазы не имеет такого свойства даже в отсутствие шума. Это объясняется малым количеством отсчетов, приходящихся на ширину самого узкого интерференционного кольца. В данном случае для девятнадцати полуколец эта величина составляет 3—4 отсчета, что недостаточно для работы данного алгоритма интерполяции, но согласуется с теоремой Котельникова.

Результаты серии экспериментов (рис. 2.17) позволяют сравнить качество оценок фазы, полученных при восстановлении кольцевых и полосчатых интерферограмм. Число полуколец или полос на скане интерферограммы выбиралось одинаковым, равным 16. Шум был белым, мультипликативным $\langle \epsilon_{\mu} \rangle = 0,21$ (0,02), $b_{\varphi} = NN/20$. Видно, что точность анализа кольцевых интерферограмм в несколько раз ниже, чем полосчатых. Причина этого прежде всего в отсутствии монотонности и условной монотонности фазы при малых x , так что первая зона Френеля на кольцевой интерферограмме неинформативна. Другие причины в том, что объектное поле не является аналитическим сигналом и в его полосе частот содержится больше шума, чем у аналогичной полосчатой интерферограммы.

Как известно, влияние нелинейного звена типа ограничителя на фазу узкополосного процесса определяется пересечением образовавшихся после ограничения спектральных полос, центральные частоты которых кратны исходной несущей частоте [109].

В этой связи становится ясно, что усреднение по ансамблю интерферограммы с разным числом интерференционных полос в условиях нелинейного детектирования не должно давать каких-либо особых эффектов по сравнению с линейным случаем.

Эксперимент, проведенный в присутствии низкочастотного мультипликативного шума со среднеквадратическим отклонением, равным 0,1, полушириной полосы шума $\Delta k_N = 5$, $NN = 128$, $\sigma_{\varphi} = 0,4\pi$ для простого ограничителя и квадратичной нелинейности с ограни-

Восстановление нелинейной интерферограммы

Объем группы усреднения	Прямая демодуляция	Дисперсионные соотношения	Интерполяция фазы
$h = 0,5, n = 1, \langle \epsilon_B \rangle = 0,79(0,02)$			
1	0,12(0,03)*	0,12(0,03)	0,08(0,02)
4	0,05(0,01)	0,05(0,01)	0,05(0,01)
9	0,04(0,08)	0,04(0,007)	0,04(0,01)
$h = 0,5, n = 2, \langle \epsilon_B \rangle = 0,84(0,01)$			
1	0,11(0,05)	0,12(0,04)	0,09(0,01)
4	0,04(0,01)	0,06(0,01)	0,06(0,01)
9	0,04(0,01)	0,04(0,06)	0,06(0,03)
$h = 0,2, n = 2, \langle \epsilon_B \rangle = 0,92(0,001)$			
1	0,11(0,03)	0,12(0,03)	0,07(0,01)
4	0,05(0,01)	0,06(0,02)	0,05(0,01)
9	0,04(0,008)	0,05(0,01)	0,04(0,007)

* Первое число (ϵ_{φ}), в скобках — $\sigma_{\epsilon_{\varphi}}$.

чителем, (2.42) отражен в табл. 2.2. Несмотря на значительные нелинейные искажения, характеризующие функционалом $\langle \epsilon_B \rangle$, качество оценки объектной фазы достаточно высокое. Причем метод интерполяции фазы в данном эксперименте не уступает альтернативным методам, так как нелинейность мало влияет на положение средин интерференционных полос. Усреднение по выборке интерферограмм с разным числом полос дает эффект, близкий к теоретическому, хотя при получении оценки (2.50) нелинейные искажения не предусматривались.

Таким образом, наблюдается слабое влияние нелинейных искажений на качество оценки объектной фазы.

Исследования точности оценки фазы при $\sigma_{\varphi} \in [0,02\pi, 4\pi]$ проводились в присутствии низкочастотного мультипликативного шума $\langle \epsilon_{\mu} \rangle = 0,45$ (0,02), $\Delta k_{\mu} = 5$, $\Delta k_{\varphi} = 3$, $NN = 128$, $p_w = 1$, если $\sigma_{\varphi} \leq 0,4\pi$, иначе $p_w = 0,5$. Для сравнения проведен также эксперимент при $\langle \epsilon_{\mu} \rangle = 0$, без усреднения (рис. 2.18). Анализ результатов эксперимента показал следующее: относительная ошибка $\langle \epsilon_{\varphi} \rangle$ уменьшается с ростом σ_{φ} , причем усреднение по ансамблю интерферограмм с разным числом полос эффективно для всех σ_{φ} и дает лучшую оценку фазы, нежели та, что получена при отсутствии шума. Абсолютная ошибка оценки в долях λ ведет себя по сравнению с $\langle \epsilon_{\varphi} \rangle$ противоположным образом — возрастает с ростом σ_{φ} , оставаясь меньше, чем $\lambda/50$, когда применяется усреднение по выборке интерферограммы с разным числом полос.

Таким образом, численный эксперимент показал:

1. Алгоритмы восстановления фазы объекта из интерферограммы, построенные на основе дисперсионных соотношений и прямой

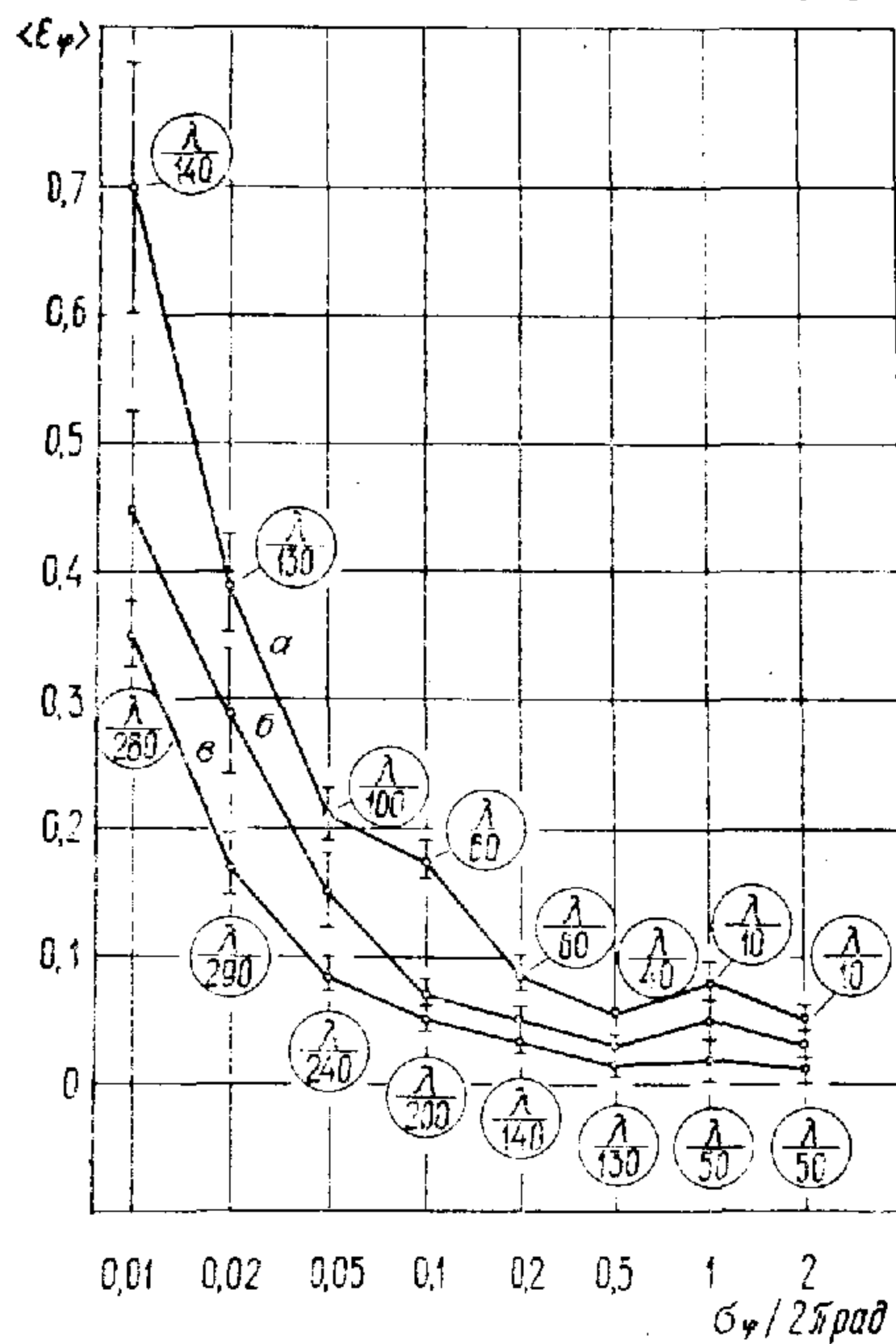


Рис. 2.18. Качество оценок фазы при низкочастотном мультипликативном шуме.

$a - \langle \epsilon_\mu \rangle = 0,45 (0,02)$, объем группы усреднения — 9; $б - \langle \epsilon_\mu \rangle = 0,0$, объем группы усреднения — 1; $в - \langle \epsilon_\mu \rangle = 0,45 (0,02)$, объем группы усреднения — 1.

демодуляции, обеспечивают более высокое качество оценки, нежели на основе метода интерполяции фазы.

2. Если шум небольшой, такой что средняя относительная ошибка интерферограммы меньше 0,4, то качество оценки объектной фазы слабо зависит от вида шума.

3. Кольцевая интерферограмма из-за неинформативности первой зоны Френеля может обеспечить точность оценки объектной фазы в 2—3 раза ниже, чем полосчатая интерфе-

рограмма, при прочих равных условиях.

4. Усреднение оценок объектной фазы по группе интерферограмм с разным числом полос дает положительный результат и за пределами ограничений, при которых получено выражение для дисперсии оценки (2.50).

Построение карты двумерной фазы. Приведем результаты применения алгоритма «Минг». Для проверки алгоритма рассчитана в ЭВМ двумерная объектная фаза $\varphi(i, j)$, заданная на круглой апертуре, вписанной в квадрат, содержащий 128×128 отсчетов.

Для каждого второго горизонтального и каждого десятого вертикального сечения объектной фазы рассчитывались сканы интерферограммы с плоской опорной волной. Объектная волна имела амплитуду, равную 0,4 от амплитуды опорной волны. Каждый из сканов интерферограммы подвергали прямой демодуляции по алгоритму «Скан».

Затем 63 горизонтальных скана и 12 вертикальных обрабатывали по алгоритму «Минг». При этом последовательно минимизировались невязки фазы в точках пересечения сканов.

Далее из полученной решетчатой функции фазы $\Phi(i, j)$ по методу наименьших квадратов вычитали параболоид вращения [31]. Результирующая функция и аналогичная ей, но полученная непосредственно из исходной объектной фазы $\varphi(i, j)$, несколько отличались друг от друга. Для количественной оценки отличия находилась разность этих двумерных функций фазы в каждой точке всех 63 горизонтальных сечений. Из полученной разности удалялась

плоскость по методу наименьших квадратов, а для остатка определялось стандартное отклонение. Оно получилось приблизительно равным 0,004 радиан. Малость этой величины позволяет сделать вывод о работоспособности алгоритма «Минг», он решает задачу последовательной минимизации невязок одномерных ортогональных сечений функции фазы.

Обработка серии интерферограмм, полученной в натурном эксперименте. Контроль оптической детали производили с помощью интерферометра Физо, $\lambda = 0,6328$ мкм. В качестве детектора использовалась фотопленка 409-Тасма-9-80. Диаметр интерферограмм составлял 15 мм. Объект в процессе контроля предположительно не изменялся, а интерферограммы отличались числом полос.

На интерферограммах с помощью телевизионного монитора выбирался прямолинейный скан, соответствующий одному и тому же диаметральному сечению контролируемой детали. На каждом скане было взято 512 8-битовых отсчетов.

Из рис. 2.19 можно сделать вывод, что в полосе частот объектного поля отношение сигнал — шум заведомо больше единицы.

В этих условиях отдельные реализации фазы, восстановленные из каждого скана интерферограмм как элемента выборки, распределены по закону, близкому к нормальному, в предположении нормальности шума [6, 60]. По этой причине выборочное среднее φ_m (2.46) будет центром интервала:

$$\hat{\varphi}_m \pm \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{m}} t_{m-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.71)$$

где σ_φ — выборочное стандартное отклонение φ ; $t_{m-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ — значение распределения Стьюдента для доверительной вероятности α . В дальнейшем будем определять 95 %-й доверительный интервал, тогда для объема выборки $m = 9$ и $\alpha = 0,05$ найдем [28] $t_{m-1}(0,975) = 2,25$.

Для обработки интерферограмм использовалась система математического обеспечения Интеркон-02-Скан-1984, реализующая алгоритм «Скан».

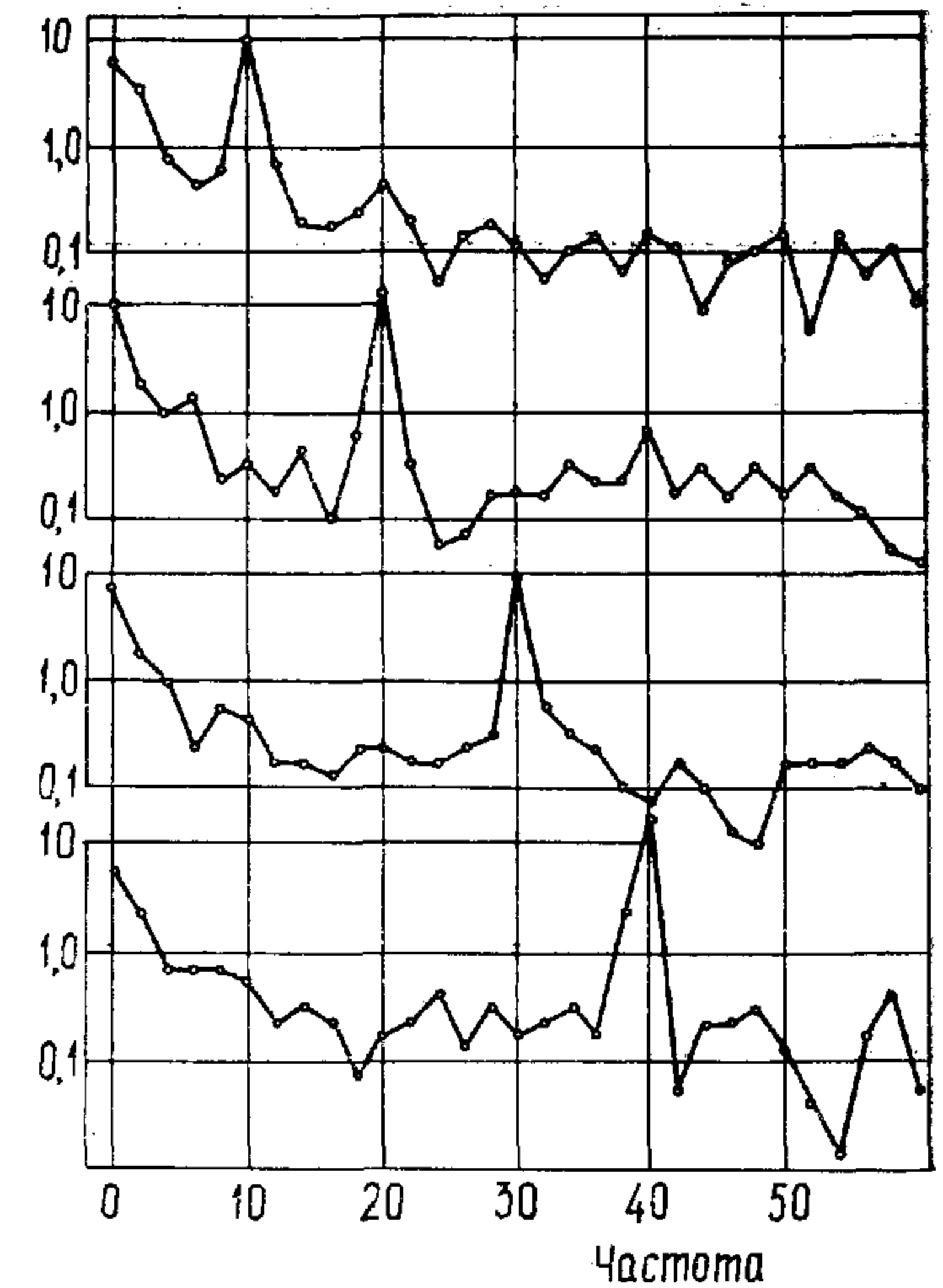


Рис. 2.19. Модули преобразования Фурье выборочных интерферограмм. Частота в долях диаметра детали.

Входящий в этот алгоритм медианный фильтр имел длину в три отсчета. При полиномиальной фильтрации устранялась линейная составляющая аддитивного фона. Коэффициент формы спектра равнялся единице.

Программа KOADP определила число интерференционных полос q и ширину спектра объектного поля Δk_w :

Номер интер- ферограммы	Исходное число по- лос	q	Δk_w	Номер интер- ферограммы	Исходное число полос	q	Δk_w
1	10,3	11	2	6	21	22	7
2	11,5	12	4	7	25,5	26	4
3	12	12	2	8	29,5	30	8
4	20	20	4	9	38,5	40	7
5	19,5	20	4				

Видно, что число полос q определяется оптимально — в соответствии с рекомендациями разд. 2.2. Ширина же спектра объектного поля Δk_w испытывает значительные флуктуации. В данном случае это обусловлено влиянием интерференционной картины от переотраженных волн. Тем не менее доверительный интервал для оценки фазы мал, так как в полосе $q \pm \Delta k_w$ отношение сигнал — шум велико.

Оценку объектной фазы $\widehat{\varphi}_m(j)$ определим как среднее арифметическое отдельных реализаций фазы, восстановленных из скана каждой выборочной интерферограммы. Обоснованием этого являются результаты (2.46), (2.50) для интерферограмм, отличающихся числом полос, и близость закона распределения реализаций фазы к нормальному. При этом выборочное среднее является оценкой максимального правдоподобия.

Оценка $\widehat{\varphi}_m(j)$ приведена на рис. 2.20, *a* — *e*, аналогичная оценка, но для фазовых функций, у которых устранена квадратичная составляющая, — на рис. 2.21, *a* — *e*. Причем *a* соответствует применению алгоритма прямой демодуляции, *б* — алгоритма на основе дисперсионных соотношений, *в* — алгоритма интерполяции фазы. На упомянутых рисунках указан также 95%-й доверительный интервал, определенный по (2.71).

Анализ рис. 2.20, 2.21 показывает, что алгоритмы прямой демодуляции и дисперсионных соотношений (*a*, *б*) дают очень близкие результаты. Это объясняется тем, что основные составляющие шума аддитивны интерферограмме и удаляются еще на стадии предварительной обработки — медианной фильтрацией, полиномиальной фильтрацией и при оптимальном продолжении скана.

Диапазон изменения оценки фазы на рис. 2.20, *a*, *б* составляет около $0,6\pi$ рад, а максимальный доверительный интервал — $0,02\pi$ рад.

Для оценки фазы, приведенной к ближайшей сфере (рис. 2.21, *a*, *б*), соотношение этих чисел несколько хуже: $0,2\pi$ и $0,02\pi$, но достоверность результатов обеспечивается.

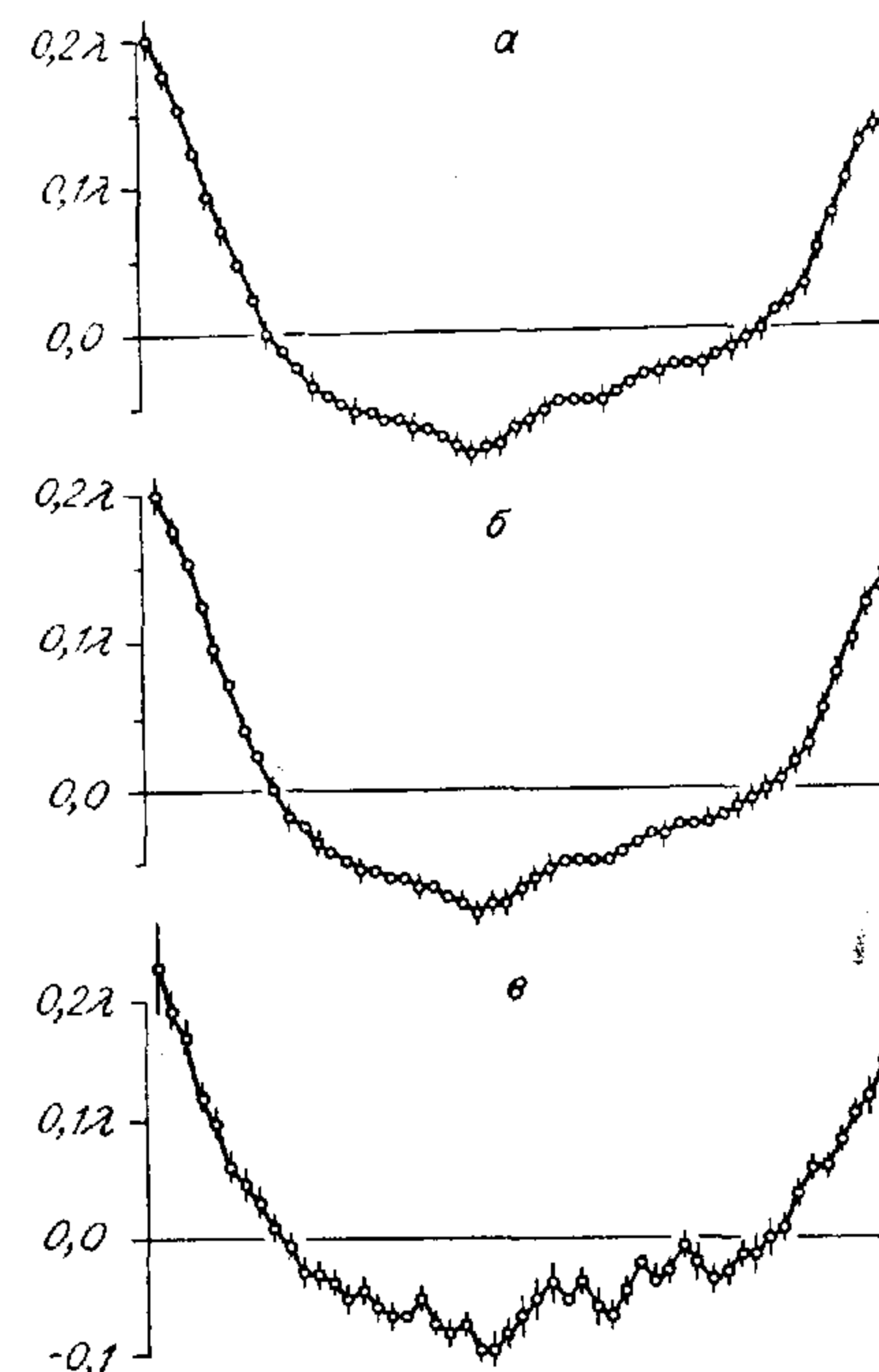


Рис. 2.20. Оценивание объектной фазы по выборке из девяти интерферограмм с разным числом полос. *a* — по методу прямой демодуляции, *б* — по методу дисперсионных соотношений, *в* — путем интерполяции.

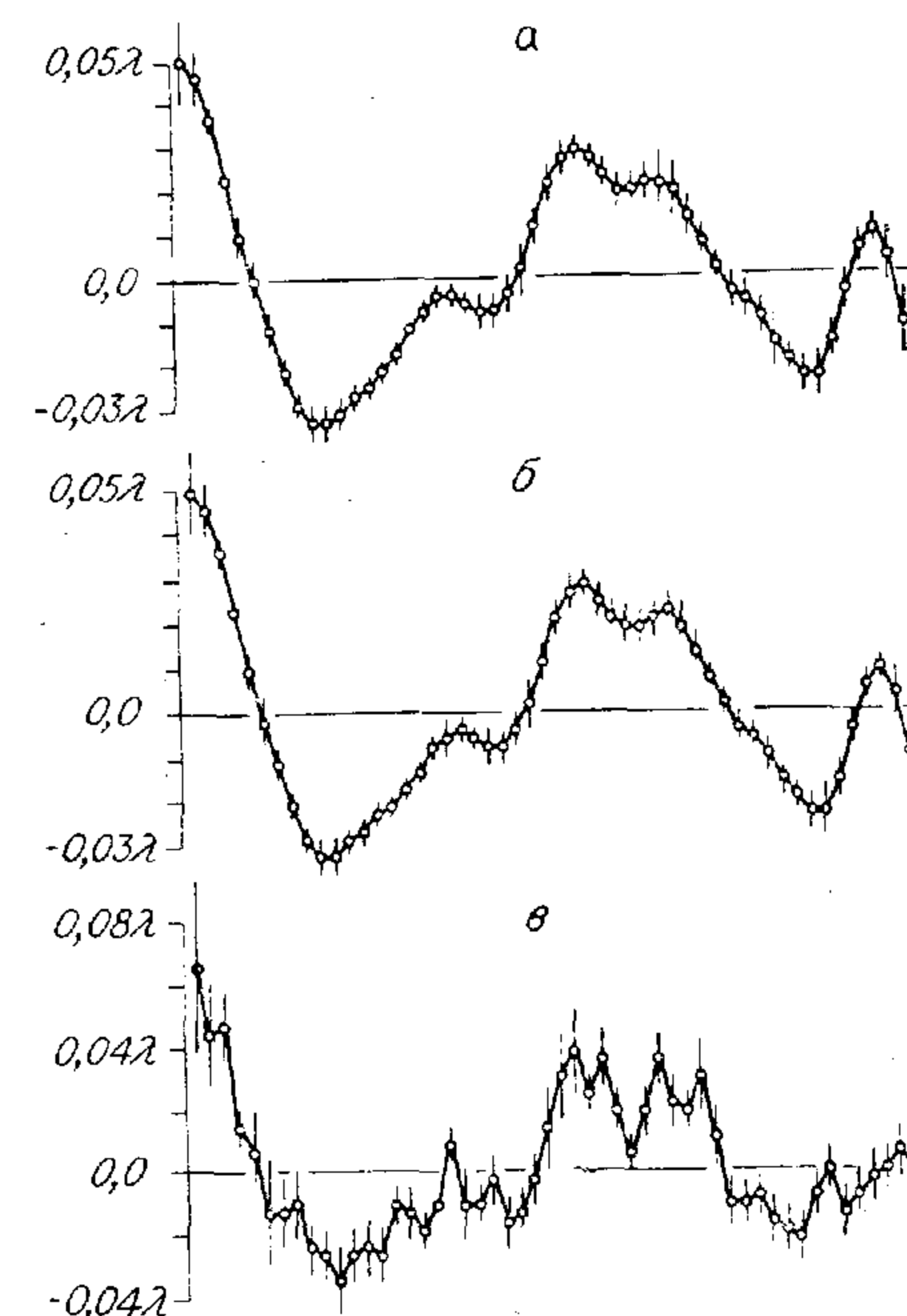


Рис. 2.21. Фаза по рис. 2.20, приведенная к ближайшей сфере.

Равенство максимальных доверительных интервалов в рассмотренных двух случаях, а также их приблизительное совпадение вдоль всего графика (рис. 2.20, *a*, *б*, 2.21, *a*, *б*) говорят о том, что общая кривизна фазы не флуктуирует от реализации к реализации.

Алгоритм интерполяции фазы дает (рис. 2.20, *в*) для диапазона изменения оценки фазы то же значение $0,6\pi$ рад, но максимальный доверительный интервал приблизительно в 4 раза больше ($0,08\pi$ рад), чем по алгоритмам *a* и *б*. После приведения к ближайшей сфере эти числа равны соответственно $0,2\pi$ и $0,06\pi$ рад.

Таким образом, алгоритмы прямой демодуляции и дисперсионных соотношений в данном эксперименте показали большую устойчивость (в 3—4 раза), нежели алгоритм интерполяции фазы (аналог традиционного алгоритма), и обеспечили максимальную среднеквадратичную ошибку не хуже, чем $0,02\pi$ рад $\sim 0,006$ мкм.

Список Литературы

К ГЛАВЕ 2

1. Автоматизация обработки интерферограмм при контроле оптических систем/Зверев В. А., Агурок И. П., Родионов С. А., Сокольский М. Н. // Оптико-мех. пром-сть.— 1978.— № 9.— С. 7—10.
2. Агурок И. П. Исследование возможностей автоматизированной обработки интерферограмм в системе с ПЗС-матрицей путем моделирования на ЭВМ // Там же.— 1983.— № 11.— С. 14—17.
3. А. с. 1024746 СССР. Интерференционный датчик волнового фронта/Витриченко Э. А., Пушной Л. А., Тартаковский В. А.— № 3403084; Заяв. 18.02.82; Оpubл. 23.06.83, Бюл. № 23.
4. А. с. 1052850 СССР. Интерференционный фазометр/Витриченко Э. А., Пушной Л. А., Тартаковский В. А.— № 3403030; Заяв. 18.02.82; Оpubл. 07.11.83, Бюл. № 41.
5. А. с. 1030645 СССР. Измеритель амплитуды и фазы световой волны/Витриченко Э. А., Пушной Л. А., Тартаковский В. А.— № 3403029; Заяв. 18.02.82; Оpubл. 23.07.83, Бюл. № 27.
6. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.— М.: Наука, 1981.— 640 с.
7. Бергланд Г. Д. Руководство к быстрому преобразованию Фурье // Зарубежная радиоэлектроника.— 1959.— № 3.— С. 52—70.
8. Библиотека программ LIDA-2 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации. Оперативно-информационный материал.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.— 162 с.
9. Боголюбов Н. П., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958.— 190 с.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1970.— 856 с.
11. Брунинг Дж. Х. Интерферометры со сканированием интерференционных полос // Оптический производственный контроль/Под ред. Д. Малакары.— М.: Машиностроение, 1985.— 400 с.
12. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений/Под ред. Т. С. Хуанга.— М.: Радио и связь, 1984.— 224 с.
13. Вакман Д. Е. Об определении понятий амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала // Радиотехника и электроника.— 1972.— Т. 17, № 5.— С. 972—978.
14. Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А. Амплитуда, фаза, частота — основные понятия теории колебаний // Усп. физ. наук.— 1977.— Т. 123, вып. 4.— С. 657—682.
15. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 1.— 744 с.
16. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 2.— 344 с.
17. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн.— М.: Наука, 1983.— 287 с.
18. Велкер Г. Б. К созданию единой теории модуляции. Ч. 1. Соотношения между огибающей и фазой // ТИИЭР.— 1966.— Т. 1, № 3.— С. 5—20.
19. Витриченко Э. А. Методы исследования астрономической оптики.— М.: Наука, 1980.— 152 с.
20. Витриченко Э. А., Соснов А. Н., Павлов Э. Р. Перспективы развития методов исследования асферической оптики // Прогрессивные методы изготовления и контроля современных оптических и оптико-электронных приборов.— Новосибирск, 1982.— С. 3—20.
21. Витриченко Э. А., Пушной Л. А., Тартаковский В. А. Интерференционный контроль оптики на основе дисперсионных соотношений для логарифма аналитического сигнала // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 286, № 1.— С. 91—95.
22. Виттих В. А., Сергеев В. В., Сойфер В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований.— М.: Наука, 1982.— 216 с.
23. Власенко В. А., Ипсер Я. Ускорение вычисления дискретного преобразования Гильберта во временном базисе // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1984.— Т. 27, № 3.— С. 86—87.
24. Голографическая измерительная система для определения поля разности фаз методом внесения контролируемого фазового сдвига/Гусев В. И., Козачок А. Г., Лопарев Е. Г. и др. // Автометрия.— 1986.— № 2.— С. 116—118.
25. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.— 368 с.
26. Гришин М. И. Автоматическая обработка фотографических изображений с применением ЭВМ.— Минск: Наука и техника, 1976.— 232 с.
27. Гусев В. Г., Яновер Б. И. О методике представления дискретного сигнала в комплексном виде на основе его гильбертова преобразования // Радиотехника и электроника.— 1983.— № 1.— С. 91—98.
28. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971.— Вып. 1.— 316 с.
29. Двухградационная автоматическая обработка оптических интерферограмм плазмы на ЭВМ/Душин Л. А., Привезенцев В. И., Таран В. С., Ямницкий В. А. // Автометрия.— 1974.— № 1.— С. 50—53.
30. Ефремов А. А., Сальников Ю. В. Изготовление и контроль оптических деталей.— М.: Высш. шк., 1983.— 255 с.
31. Заключительный отчет по НИР № 12-84-36 «Интеркон»/Ин-т оптики атмосферы СО АН СССР.— Томск, 1985.— 75 с.
32. Зуев В. Е., Лукин В. П., Тартаковский В. А. Алгоритмы восстановления фазы из интерферограмм методами интегральных преобразований // Лазерное, оптическое и спектральное приборостроение.— Минск, 1986.— С. 271—272.
33. Как С. К. Дискретное преобразование Гильберта // ТИИЭР.— 1970.— Т. 58, № 4.— С. 118—119.
34. Келдыш М. В. О приближении голоморфных функций целыми функциями // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 47.— С. 243—245.
35. Коломийцова Т. С., Константиновская Н. В., Гойко Н. А. Интерференционный метод контроля качества главного зеркала БТА // Оптико-мех. пром-сть.— 1976.— № 12.— С. 3—6.
36. Коржик В. И. Огибающая сигнала и некоторые ее свойства // Радиотехника.— 1968.— Т. 23, № 4.— С. 1—6.
37. Коржик В. И. Расширенное преобразование Гильберта и его применение в теории сигналов // Проблемы передачи информации.— 1969.— Т. 5, вып. 4.— С. 3—18.
38. Коронкевич В. П., Ханов В. А. Современные лазерные интерферометры.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.— 182 с.
39. Креопалова Г. В., Пуряев Д. Т. Исследование и контроль оптических систем.— М.: Машиностроение, 1978.— 224 с.
40. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.— М.: Наука, 1980.— 286 с.
41. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. вторая.— М.: Сов. радио, 1975.— 392 с.
42. Левин Б. Р. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 583 с.
43. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.— 520 с.
44. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях.— М.: Мир, 1983.— Т. 1.— 312 с.
45. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1972.— 470 с.
46. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний.— М.: Наука, 1980.— 536 с.

47. Миркин Л. И., Рабинович М. А., Ярославский Л. М. Метод генерирования коррелированных, гауссовских, псевдослучайных чисел на ЦВМ // Журн. вычислительной математики, математической физики.— 1972.— № 5.— С. 1353—1357.
48. Многоградационная автоматическая обработка оптических интерферограмм плазмы на ЭВМ/Душин Л. А., Привезенцев В. И., Таран В. С., Ямницкий В. А. // Автометрия.— 1984.— № 3.— С. 35—40.
49. Некоторые вопросы расшифровки интерференционных картин с применением ЦВМ/Гришин М. П., Курбанов Ш. М., Маркелов В. П., Соколов В. А. // Журн. прикл. спектроскопии.— 1974.— Т. 20, вып. 4.— С. 682—689.
50. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения.— М.: Мир, 1976.— 461 с.
51. Обработка оптических интерферограмм на ЭВМ/Бурдонский И. Н., Гришин М. П., Курбанов Ш. М. и др. // Автометрия.— 1971.— № 4.— С. 21—26.
52. Обработка интерферограмм на ЭВМ и определение функции рассеяния точки и оптической передаточной функции при контроле и доводке оптических систем/Ган М. А., Устинов С. И., Котов В. В. и др. // Оптико-мех. пром-сть.— 1978.— № 9.— С. 25—28.
53. Обработка интерферограмм на ЭВМ/Арсенин В. Я., Бурдонский И. Н., Кондрашов В. Н. и др. // Диагностика плазмы.— М.: Энергоиздат, 1981.— Вып. 4 П.— С. 154—160.
54. Обратные задачи в оптике/Под ред. Г. П. Болтса.— М.: Машиностроение, 1984.— 200 с.
55. Окатов А. В., Чернышев Е. Э. Вычисление компонентов аналитического сигнала с помощью цифрового фильтра Гильберта // Радиотехника.— 1984.— № 10.— С. 65—67.
56. Определение оптических постоянных материала с помощью соотношений Крамерса—Кронига/Аркатова Т. Г., Гопштейн Н. М., Макарова Е. Г., Михайлов Б. А. // Оптико-мех. пром-сть.— 1981.— № 9.— С. 44—52.
57. Оптические и инфракрасные телескопы 90-х годов/Под ред. А. Хьюит.— М.: Мир, 1983.— 296 с.
58. Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия.— М.: Наука, 1977.— 336 с.
59. Отчет по этапу № 1 НИР № 12-84-36 «Интеркон»/Ин-т оптики атмосферы СО АН СССР.— Томск, 1984.— 55 с.
60. Пестряков В. Б. Фазовые радиотехнические системы (основы статистической теории).— М.: Сов. радио, 1968.— 468 с.
61. Питербарг Л. И., Гриценко В. А. Устранение «выбросов» в рядах гидрофизических измерений с помощью медианной фильтрации // Океанология.— 1983.— Т. 23, вып. 1.— С. 161—163.
62. Питербарг Л. И. Медианная фильтрация случайных процессов // Проблемы передачи информации.— 1984.— Т. 20, вып. 1.— С. 65—73.
63. Похлиг С. К. Длительность сигнала и преобразование Фурье // ТИИЭР.— 1980.— Т. 68, № 5.— С. 100—101.
64. Приближенное решение операторных уравнений/Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.— М.: Наука, 1969.— 455 с.
65. Пуряев Д. Т. Методы контроля оптических асферических поверхностей.— М.: Машиностроение, 1976.— 262 с.
66. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 121 с.
67. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1978.— 848 с.
68. Райс С. О. Огибающие узкополосных сигналов // ТИИЭР.— 1982.— Т. 70, № 7.— С. 5—13.
69. Рекиша А. А. Г. Нули целых функций: Теория и инженерные приложения // ТИИЭР.— 1980.— Т. 68, № 3.— С. 5—30.
70. Родионов С. А., Усоскин В. В., Агурок И. П. Автоматизация обработки результатов контроля оптических систем и деталей // Оптическое приборостроение. Труды ЛИТМО.— Л., 1980.— С. 18—22.
71. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы.— М.: Наука, 1976.— 496 с.
72. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1974.— 320 с.
73. Скоков И. В. Расчет спектральных интерференционных приборов.— М.: Машиностроение, 1983.— 79 с.
74. Современные телескопы/Под ред. Дж. Бербиджа, А. Хьюит.— М.: Мир, 1984.— 312 с.
75. Создание прогрессивных методов и аппаратуры для обработки и контроля астрооптики с применением ЭВМ (Отчет по теме НСУ-461-81)/Ленингр. оптико-механическое объединение им. В. И. Ленина.— Л., 1985.— 500 с.
76. Сороко Л. М., Стриж Т. А. Спектральные преобразования на ЭВМ.— Дубна, 1972.— 136 с.
77. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики.— М.: Наука, 1971.— 616 с.
78. Сороко Л. М. Преобразование Гильберта и его применение в оптике // Материалы Пятой всесоюз. шк. по голографии.— Л., 1973.— С. 40—95.
79. Сороко Л. М. Гильберт-оптика.— М.: Наука, 1981.— 160 с.
80. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1979.— 416 с.
81. Тартаковский В. А. Анализ двумерных оптических сигналов в гибридной вычислительной структуре // III Всесоюз. симп. по лазерному зондированию атмосферы.— Томск, 1974.— С. 270—274.
82. Тартаковский В. А. Об анализе двумерной интерференционной картины // III Всесоюз. симп. по распространению лазерного излучения в атмосфере.— Томск, 1975.— С. 230—231.
83. Тартаковский В. А. Программа дискретного преобразования Гильберта // Алгоритмы и программы.— 1979.— 6(32), № 50.— П003869, С. 31.
84. Тартаковский В. А., Покасов В. В. Определение огибающей и фазы в оптике и взаимосвязь между ними/Ин-т оптики атмосферы СО АН СССР.— Томск, 1980.— 13 с.— Деп. в ВИНТИ, 15.01.89, № 356-80.
85. Тартаковский В. А. Об интерферометрии параболического волнового поля // VI Всесоюз. симп. по распространению лазерного излучения в атмосфере.— Томск, 1981.— Ч. 3.— С. 32—34.
86. Тартаковский В. А. Дисперсионные соотношения для логарифма аналитического сигнала в двумерном случае и их приложение к интерферометрии // Сборник трудов Четвертой всесоюз. конф. по голографии.— Ереван: ВНИИРИ, 1982.— Т. 1.— С. 723—727.
87. Тартаковский В. А. Исследование точности восстановления фазы из интерферограммы методами интегральных преобразований // Цифровые и оптико-цифровые методы обработки изображений: Межвузовский научно-технический сборник.— Томск, 1985.— С. 90—97.
88. Тартаковский В. А. Некоторые алгоритмы анализа данных в интерференционных датчиках волнового фронта // Изв. вузов. Физика.— 1985.— № 11.— С. 96—105.
89. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— 500 с.
90. Тихонов А. Н. Один способ определения огибающей квазигармонических флуктуаций // Радиотехника и электроника.— 1957.— Т. 2, № 4.— С. 562—568.
91. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 286 с.
92. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Таблица преобразований Гильберта // Радиотехника.— 1970.— Т. 25, № 3.— С. 85—89.
93. Трахтман А. М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов.— М.: Сов. радио, 1972.— 352 с.
94. Уайли Р. Г. Об итеративном методе восстановления сигналов с ограниченной полосой // ТИИЭР.— 1978.— Т. 66, № 4.— С. 185—186.
95. Ушаков А. Н. Исследование некоторых адаптивных методов фильтрации шума на интерферограммах // Автометрия.— 1979, № 4.— С. 61—68.

96. Ушаков А. Н. Автоматическая обработка интерферограмм на ЭВМ // Автоматизация. — 1980. — № 4. — С. 75—82.
97. Ушаков А. Н. Автоматическая обработка интерферограмм на ЦВМ // Цифровая обработка сигналов и ее применение. — М.: Наука, 1981. — С. 99—124.
98. Фазоизмерительные системы и устройства: Сб. статей по материалам научно-технической конференции/Под ред. В. Л. Аграновича. — Томск: Изд-во ТГУ, 1974. — 292 с.
99. Фомин В. Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. — М.: Наука, 1983. — 288 с.
100. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
101. Фотоэлектрический интерферометр на основе интегральных фотодиодных матриц с обработкой интерферограмм в реальном масштабе времени/Госьков П. И., Горлов С. Н., Загуляев А. В., Кондратьева А. Л. // Оптические сканирующие устройства и измерительные приборы на их основе. Тез. докл. ко Второму всесоюз. совещ. — 1984. — Ч. 2. — С. 41—45.
102. Финк Л. М. Соотношения между спектром и мгновенной частотой сигнала // Проблемы передачи информации. — 1966. — Т. 2, вып. 4. — С. 26—38.
103. Финк Л. М. Сигналы, помехи, ошибки... — М.: Связь, 1978. — 272 с.
104. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971. — 408 с.
105. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Прогресс в Советском Союзе в области теории фinitных функций и ее применений в физике и технике // ТИИЭР. — 1977. — Т. 65, № 7. — С. 16—45.
106. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // Там же. — 1978. — Т. 66, № 1. — С. 60—96.
107. Чайлдере Д. Дж., Скиннер Д. П., Кемерейт Р. Ч. Кепстр и его применение при обработке данных. Обзор // Там же. — 1977. — Т. 65. — С. 5—23.
108. Шафер Р. У., Мерсеро Р. М., Ричардс М. А. Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений // Там же. — 1981. — Т. 69, № 4. — С. 34—35.
109. Ярославский Л. П., Фаянс А. М. Исследование возможностей обработки и анализа интерферограмм на ЦВМ // Иконика. Цифровая голография. Обработка изображений/ИППИ АН СССР. — М.: Наука, 1975. — С. 27—49.
110. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. — М.: Сов. радио, 1979. — 312 с.
111. Becker F., Meier G. E. A., Wegner H. Automatic evaluation of interferograms // Proc. SPIE. — 1982. — Vol. 359. — P. 386—393.
112. Cadzow J. A. An extrapolation procedure for band-limited signals // IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing. — 1979. — Vol. ASSP-27, N 1. — P. 4—12.
113. Tom V. T., Quatieri T. F., Hayes M. H., McClellan J. H. // Convergence of iterative nonexpansive signal reconstruction algorithms IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing. — 1981. — Vol. ASSP-29, N 5. — P. 1052—1058.
114. Creath K. Phase-shifting speckle interferometry // Appl. Opt. — 1985. — Vol. 24, N 18. — P. 3053—3058.
115. Dörband B. Die 3-Interferogramm-Methode zur automatischen Streifenbewertung in rechnergesteuerten digitalen Zweistrahlinterferometern // Optik. — 1982. — Bd 60, N 2. — S. 161—174.
116. Freniere E. R., Tolere O. E., Race R. Interferogram evaluation program for the HP9825A calculator // Opt. Eng. — 1981. — Vol. 20, N 2. — P. 253—255.
117. Funnell W. R. J. Image processing applied to the interactive analysis of interferometric fringes // Appl. Opt. — 1981. — Vol. 20, N 18. — P. 3245—3249.
118. Gabor D. Theory of communication // J. IEE. — 1946. — Vol. 93, pt 3. — P. 429—441.
119. Jain A. K., Ranganath S. Extrapolation algorithms for discrete signals with application in spectral estimation // IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing. — 1981. — Vol. ASSP-29, N 4. — P. 830—845.
120. Jatagai T. Automatic fringe analysis using digital processing techniques // Opt. Eng. — 1982. — Vol. 21, N 3. — P. 432—435.
121. Ichioka Y., Inuiya M. Direct phase detecting system // Appl. Opt. — 1972. — Vol. 11, N 7. — P. 1507—1514.
122. Küchel F. M., Schmieder Th., Tiziani H. J. Beitrag zur Verwendung von Zernike-Polynomen bei der automatischen Interferenzstreifenbewertung // Optik. — 1983. — Bd 65, N 2. — S. 123—142.
123. Muey W. W., Jr. Two-dimensional fringe-pattern analysis // Appl. Opt. — 1983. — Vol. 22, N 23. — P. 3848—3901.
124. Mandel L. Complex representation of optical fields in coherence theory // J. Opt. Soc. Am. — 1967. — Vol. 57, N 5. — P. 613—617.
125. Massie N. A., Nelson R. D., Holly S. High-performance real-time heterodyne interferometry // Appl. Opt. — 1979. — Vol. 18, N 11. — P. 1797—1803.
126. Mertz L. Complex interferometry // Appl. Opt. — 1983. — Vol. 22, N 10. — P. 1530—1534.
127. Mertz L. Real-time fringe-pattern analysis // Ibid. — P. 1535—1539.
128. Nakadate S., Magome N., Honda T., Tsujiuchi J. Hybrid holographic interferometer for measuring three-dimensional deformations // Opt. Eng. — 1981. — Vol. 20, N 2. — P. 246—252.
129. Nieto-Vesperinas dispersion relations in two dimensions: Applications to the phase problem // Optik. — 1980. — Bd 36, N 4. — S. 377—384.
130. Nugent K. A. Interferogram analysis using accurate fully automatic algorithm // Appl. Opt. — 1985. — Vol. 24, N 18. — P. 3101—3105.
131. Huang T. S., Sanz J. L. S., Hong Fan et al. Numerical comparison of several algorithms for band-limited signal extrapolation // Appl. Opt. — 1984. — Vol. 23, N 2. — P. 307—317.
132. Papoulis A. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation // IEEE Trans. circuits syst. — 1975. — Vol. CAS-22, N 9. — P. 735—742.
133. Sanz J. L. C., Huang T. S. Iterative time-limited signal restoration // IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing. — 1983. — Vol. ASSP-31, N 3. — P. 643—649.
134. Sanz J. L. C., Huang T. S. Discrete and continuous band-limited signal extrapolation // Ibid. — 1983. — Vol. ASSP-31, N 5. — P. 1276—1285.
135. Sanz J. L. C., Huang T. S. Some aspects of band-limited signal extrapolation: models, discrete approximations and noise // Ibid. — 1983. — Vol. ASSP-31, N 6. — P. 1492—1501.
136. Schemm J. B., Vest C. H. Fringe-pattern recognition and interpolation using nonlinear regression analysis // Appl. Opt. — 1983. — Vol. 22, N 18. — P. 2850—2853.
137. Takeda M., Ina H., Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry // J. Opt. Soc. Am. — 1982. — Vol. 72, N 1. — P. 156—160.
138. Burge R. E., Fiddy M. A., Greenaway A. H., Ross G. The phase problem // Proc. Roy. Soc., London. — 1976. — Vol. A350. — P. 191—212.
139. Burge R. E., Fiddy M. A., Greenaway A. H., Ross G. The application of dispersion relations (Hilbert transform) to phase retrieval // J. Phys. D: Appl. Phys. — 1974. — Vol. 7. — P. 165—168.
140. Toyooka S., Tominaga M. Spatial fringe scanning for optical phase measurement // Opt. Commun. — 1984. — Vol. 51, N 2. — P. 68—70.
141. Womack K. H. Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection // Opt. Eng. — 1984. — Vol. 23. — P. 391—395.
142. Wyant J. C. Interferometric optical metrology: basic principles and new systems // Laser Focus. — 1982. — Vol. 18, N 5. — P. 65—71.